

多段配筋矩形 RC 断面の曲げ応力算出エクセルに関して

日中構造研究所 松原勝己

1. はじめに

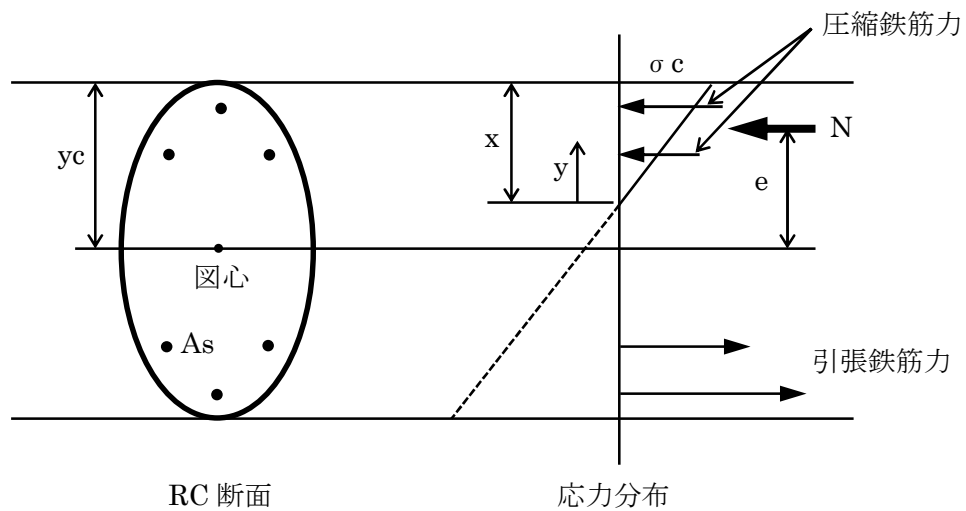
先に、分割法を用いた多段配筋用の曲げ応力度算出のマクロを作成したが、その際に誘導した中立軸位置や発生応力度の算定式は、やや複雑な形を有していた。また、多要素の FEM 解析結果を一括して処理することから、エクセル VBA によるプログラムを使用して中立軸位置や応力度の算出を実施した。

一方、建築分野の設計指針「鉄筋コンクリート構造計算規準・同解説 日本建築学会 2018年12月」（以下、建築 RC 規準と記す）の第 14 条の記載によれば、任意形状かつ多段配筋の RC 断面に対する中立軸算定式として、換算断面 1 次モーメント、換算 2 次モーメントおよび軸力偏心位置により表現できることが示されている。これを利用することにより、VBA を使用することなくエクセル表計算のソルバー機能により応力度計算（RC 断面弾性計算）が実行できることが分かったので、以下に報告するものである。

なお、掲載したエクセルファイルは自由に使用していただいて結構ですが、結果の妥当性判断は使用者に委ねることとします。

2. 応力度計算の定式

応力算出時の断面仮定を、図 2-1 に示す。



【記号】

yc : 圧縮縁から断面図心までの距離、 As : 鉄筋断面積

x : 圧縮縁から中立軸までの距離、 σ_c : 圧縮縁におけるコンクリート応力

y : 中立軸から圧縮縁方向を正とした距離 (y の位置でのコンクリート応力は $\sigma_c \cdot y/x$ となる)

N : 作用軸力

e : 偏心距離 (作用曲げモーメント M を考慮した軸力偏心位置から図心までの距離、 $e=M/N$)

図 2-1 断面仮定 (建築 RC 規準より引用・修正)

図 2-1 を参照し、断面軸方向の力の釣り合い、および中立軸周りのモーメントの釣り合いから、次式が成立する。

$$N = \int \sigma_c \frac{y}{x} dA + \sum n \sigma_c \frac{y}{x} A_s \quad (1)$$

$$N(x - y_c + e) = \int \sigma_c \frac{y^2}{x} dA + \sum n \sigma_c \frac{y^2}{x} A_s \quad (2)$$

ここに、 n はヤング係数比であり、許容応力度法では $n=15$ が一般的に使用される。また、積分記号はコンクリート応力、総和記号は鉄筋応力に関するものであり、コンクリートについては圧縮領域に対する積分 (dA は中立軸から y だけ離れた位置におけるコンクリート断面の微小面積) を、鉄筋については全鉄筋の総和を意味している。さらに、中立軸から y だけ離れた位置でのコンクリートおよび鉄筋の応力が、それぞれ $\sigma_c \cdot y/x$ および $n \sigma_c \cdot y/x$ で表されることを考慮している。

なお、式(1)および(2)において、 σ_c および x は積分および総和記号に依存しないが、 y および A_s は積分および総和記号に依存する。また、軸力 N は圧縮を正と定義している。

ここで、中立軸に関する換算断面 1 次モーメント G_x および中立軸に関する換算断面 2 次モーメント I_x を定義すれば、式(1)および(2)は以下のように書き換えることができる。

$$N = \frac{\sigma_c}{x} G_x \quad (3)$$

$$N(x - y_c + e) = \frac{\sigma_c}{x} I_x \quad (4)$$

$$\text{ここに、} G_x = \int y dA + \sum n A_s y \quad (5)$$

$$I_x = \int y^2 dA + \sum n A_s y^2 \quad (6)$$

上記の式(5)および(6)の換算 1 次および 2 次モーメントは、コンクリートについては、引張部分の寄与を無視し、鉄筋については断面積の n 倍の寄与を考慮するものである。

式(3)および(4)より、 N 、 σ_c および x を消去すれば、次式が得られる。

$$x - y_c + e = \frac{I_x}{G_x} \quad (7)$$

ここで、 $x - y_c + e$ は、中立軸から曲げモーメントを考慮した軸力偏心位置までの距離であり、これを d_x と定義すれば、次式となる。

$$d_x = \frac{I_x}{G_x} \quad (8)$$

ここに、 $d_x = x - y_c + e$

式(8)は、中立軸周りの換算断面 2 次モーメント I_x を換算断面 1 次モーメント G_x で除した値が、中立軸から軸力偏心位置までの距離 d_x に等しいことを示している。上記の式(7)あるいは(8)が、中立軸位置 x を求めるための方程式となる。

式(7)において、 y_c は断面諸元 (断面形状、鉄筋量および鉄筋配置) によって決まり、偏心距離 $e (=M/N)$ は作用断面力によって決まるのに対し、 x 、 I_x および G_x については中立軸位置に依存するために、陽な形で x を定めることができない。すなわち、 x の算定に繰り返し計算が必要になるが、エクセルにおいて断面諸元を定義しておけば、エクセルのソルバー機能を用いることで算出可能である。

式(7)で、 $e=M/N$ を考慮すれば、次式を得る。

$$G_x = \frac{I_x N}{N(x - y_c) + M} \quad (9)$$

中立軸算定式として、式(7)あるいは(8)を用いることもできるが、軸力がゼロ ($N=0$) のときゼロ割りが生じるので、式(9)を使用すると $N=0$ の場合でも対応可能である。なお、式(9)より $N=0$ のとき $G_x=0$ と

なることがわかる。

次に、コンクリートおよび鉄筋の発生応力を求める。

式(4)において、 $e=M/N$ を考慮すれば、コンクリート圧縮縁における応力 σ_c として、次式を得る。

$$\sigma_c = \frac{N(x-y_c)+M}{I_x} x \quad (10)$$

式(10)により、中立軸位置 x を代入することで、コンクリート圧縮縁の応力値を求めることができる。

また、鉄筋応力 σ_s については、断面高さ方向の応力分布の直線性を考慮し、以下の式で表すことができる。ここに、鉄筋応力 σ_s は引張を正と定義した。

$$\sigma_s = -\frac{x-c}{x} n\sigma_c \quad (11)$$

ここに、 c は、圧縮縁から鉄筋位置までの断面高さ方向の距離（圧縮縁からの被り厚さ）である。

2. 分割法による曲げ応力度の算出で使用した中立軸算定式との比較

後述の参考資料に示すように、分割法による曲げ応力度算出のエクセルマクロにおいては、以下の式(12)に示す中立軸算定式を用いた。

以下では、式(12)が「1.応力度計算の定式」で誘導した中立軸算定式と同一であることを示す。

$$\sum_{i(c)} \{N'(y_{ci} + y_c - h) - M\}(x - h + y_{ci})A_{ci} + \sum_{i(c+t)} \{N'(y_{si} + y_c - h) - M\}(x - h + y_{si})nA_{si} = 0$$

($\sum_{i(c+t)}$ は圧縮および引張両方の領域における総和を示す) (12)

ここで、コンクリート応力と鉄筋応力を統一的に表現するために、 A_{ci} および nA_{si} を A_{ei} (換算断面積：コンクリート応力は引張無視、鉄筋応力は n 倍とする) と置き、また y_{ci} と y_{si} を y_i と置けば、次式となる。

$$\sum_i \{N'(y_i + y_c - h) - M\}(x - h + y_i) A_{ei} = 0 \quad (13)$$

曲げモーメントを考慮したときの軸力偏心量 e を、 $e=M/N'$ で定義すれば、次式となる。

$$\sum_i \{y_i + y_c - h - e\}(x - h + y_i) A_{ei} = 0 \quad (14)$$

ここで、 $y_i = h - x + y_i'$ と置けば (y_i' ：中立軸位置からコンクリート分割要素あるいは鉄筋までの距離)、次式を得る。

$$\sum_i (y_c - x + y_i' - e) y_i' A_{ei} = 0 \quad (15)$$

すなわち、

$$(y_c - x - e) \sum_i y_i' A_{ei} + \sum_i y_i'^2 A_{ei} = 0 \quad (16)$$

ここで、中立軸周りの換算断面 1 次モーメント G_x および中立軸周りの換算断面 2 次モーメント I_x を定義すれば、上式は以下の通りとなる。

$$(y_c - x - e)G_x + I_x = 0 \quad (17)$$

ここに、 $G_x = \sum_i y_i' A_{ei}$ および $I_x = \sum_i y_i'^2 A_{ei}$

すなわち、

$$x - y_c + e = \frac{I_x}{G_x} \quad (18)$$

式(18)は、式(7)に一致する。すなわち、分割法による曲げ応力度算出で使用した中立軸算定式は、換算断面 1 次および 2 次モーメントを用いる中立軸算定式と同一であることがわかる。

3. 矩形 RC 断面における換算断面 1 次モーメントおよび換算断面 2 次モーメント

1.で記述した式(9)によって中立軸位置を算出する場合、RC 断面の換算断面 1 次モーメント G_x と換算断面 2 次モーメント I_x が必要になる。以下では、矩形 RC 断面に対する G_x および I_x の具体的表示を示す。

G_x へのコンクリート部分の寄与 G_{xc} については、中立軸周りの換算断面 1 次モーメントとして、引張部分を無視し、圧縮部分の面積 bx と腕の長さ $x/2$ (x : 圧縮縁から中立軸までの距離) を乗じることにより、次式で表すことができる。

$$G_{xc} = bx \cdot \frac{x}{2} = \frac{bx^2}{2} \quad (19)$$

また、 G_x への鉄筋部分の寄与 G_{xs} については、中立軸周りの換算断面 1 次モーメントとして、全鉄筋に対し n 倍 (n : ヤング係数比) の断面積を考慮し、換算鉄筋断面積 nA_{si} に腕の長さ $(x-c)$ (x : 圧縮縁から中立軸までの距離、 c : 圧縮縁から鉄筋までの距離) を乗じて総和を取ることにより、次式で表すことができる。

$$G_{xs} = \sum nA_{si}(x - c_i) \quad (20)$$

ここに、 n : ヤング係数比 (=15)

A_{si} : i 段目鉄筋の断面積

x : 圧縮縁から中立軸までの距離

c_i : i 段目鉄筋の圧縮縁から中立軸までの距離

式(20)において、 $x-c_i$ は正および負の両者の値を有し、中立軸より圧縮側では正值、一方中立軸より引張側では負値となる。

したがって、式(19)および(20)より、換算断面 1 次モーメント G_x は、次式で表される。

$$G_x = G_{xc} + G_{xs} = \frac{bx^2}{2} + \sum nA_{si}(x - c_i) \quad (21)$$

なお、式(21)の G_x のコンクリート部分の寄与 G_{xc} は、中立軸が断面内にある場合であり、中立軸が断面外にある場合 (全断面引張あるいは全断面圧縮) には別途考慮する必要がある。中立軸が圧縮縁よりも上部にある場合 ($x < 0$ のとき)、コンクリート断面が全て引張となるので、 $G_{xc}=0$ となる。また、中立軸が引張縁よりも下部にある場合 ($x > h$ のとき)、コンクリート断面が全て圧縮となるので、面積 bh に腕の長さ $(x-h/2)$ を乗じ、 $G_{xc}=bh(x-h/2)$ となる。

次に、換算断面 2 次モーメントを求める。

I_x へのコンクリート部分の寄与 I_{xc} については、中立軸周りの換算断面 2 次モーメントとして、引張部分を無視し、圧縮部分の図心に関する断面 2 次モーメント $bx^3/12$ と中立軸から図心までの距離の寄与分 $bx \cdot (x/2)^2$ の和で、次式で表される。

$$I_{xc} = \frac{bx^3}{12} + \frac{bx^3}{4} = \frac{bx^3}{3} \quad (22)$$

また、 I_x への鉄筋部分の寄与 I_{xs} については、中立軸周りの換算断面 2 次モーメントとして、全鉄筋に対し n 倍 (n : ヤング係数比) の断面積を考慮し、換算鉄筋断面積 nA_{si} に腕の長さの 2 乗 $(x-c)^2$ (x : 圧縮縁から中立軸までの距離、 c : 圧縮縁から鉄筋までの距離) を乗じて総和を取ることにより、次式で

表すことができる。

$$I_{xs} = \sum nA_{si}(x - c_i)^2 \quad (23)$$

したがって、式(22)および(23)より、換算断面 2 次モーメント I_x は、次式で表される。

$$I_x = I_{xc} + I_{xs} = \frac{bx^3}{3} + \sum nA_{si}(x - c_i)^2 \quad (24)$$

なお、式(24)の I_x のコンクリート部分の寄与 I_{xc} は、中立軸が断面内にある場合であり、中立軸が断面外にある場合（全断面引張あるいは全断面圧縮）には別途考慮する必要がある。中立軸が圧縮縁よりも上部にある場合（ $x < 0$ のとき）、コンクリート断面が全て引張となるので、 $I_{xc} = 0$ となる。また、中立軸が引張縁よりも下部にある場合（ $x > h$ のとき）、コンクリート断面が全て圧縮となるので、図心周りの値 $bh^3/12$ に腕の長さの補正分 $bh(x-h/2)^2$ を加え、 $I_{xc} = bh^3/12 + bh(x-h/2)^2$ となる。

以上より、矩形 RC 断面に対する中立軸周りの換算断面 1 次モーメント G_x および換算断面 2 次モーメント I_x は、以下のように表すことができる。

$$G_x = \begin{cases} \frac{bx^2}{2} + \sum nA_{si}(x - c_i) & (0 \leq x \leq h) \\ bh\left(x - \frac{h}{2}\right) + \sum nA_{si}(x - c_i) & (x > h) \\ \sum nA_{si}(x - c_i) & (x < 0) \end{cases} \quad (25)$$

$$I_x = \begin{cases} \frac{bx^3}{3} + \sum nA_{si}(x - c_i)^2 & (0 \leq x \leq h) \\ \frac{bh^3}{12} + bh\left(x - \frac{h}{2}\right)^2 + \sum nA_{si}(x - c_i)^2 & (x > h) \\ \sum nA_{si}(x - c_i)^2 & (x < 0) \end{cases} \quad (26)$$

ここに、 h : 断面高さ

b : 断面幅

x : 圧縮縁から中立軸までの距離

n : ヤング係数比 (=15)

A_{si} : i 段目鉄筋の断面積

c_i : i 段目鉄筋の圧縮縁から中立軸までの距離

4. 矩形 RC 断面の応力度の計算手順

1.および3.の記載から、応力度の計算手順は、以下の通りとなる。

(1)断面力および断面諸元の入力

RC 断面への作用曲げモーメント M および作用軸力 N 、断面高さ h 、断面幅 b 、 i 段目の鉄筋断面積 A_{si} 、 i 段目の鉄筋被り c_i (圧縮縁から鉄筋までの距離) を、入力する。

(2)図心位置 y_c の算出

圧縮縁から図心位置までの距離 y_c を、次式により算出する。

$$y_c = \frac{\frac{bh^2}{2} + \sum nA_{si}c_i}{bh + \sum nA_{si}}$$

(3)中立軸位置 x の仮定

中立軸の初期値を設定する。中立軸が断面内にある場合には、初期値として $x=0$ を仮定する。

(4)換算断面 1 次モーメントおよび換算断面 2 次モーメントの算出

中立軸が断面内に有る場合、中立軸周りの換算断面 1 次モーメントおよび中立軸周りの換算断面 2 次モーメントを、次式により算出する。

$$G_x = \frac{bx^2}{2} + \sum nA_{si}(x - c_i) \quad , \quad I_x = \frac{bx^3}{3} + \sum nA_{si}(x - c_i)^2$$

(5)中立軸算定式の左辺値と右辺値の比較

中立軸算定式として、式(9)を使用し、左辺値 $A = G_x$ 、右辺値 $B = \frac{I_x N}{N(x - y_c) + M}$ を計算する。さらに、 $A=B$ となることを確認し、 $A \neq B$ のときには x の値を変更し、手順(3)に戻る。

(6)中立軸位置 x の算出

手順(3)~(5)を繰り返し、 $A=B$ となった時点で x の値を確定する。

(7)コンクリートおよび鉄筋の発生応力度の算出

コンクリート圧縮縁における応力度 σ_c および鉄筋の応力度 σ_{si} を次式により算出する。

$$\sigma_c = \frac{N(x - y_c) + M}{I_x} x \quad , \quad \sigma_{si} = -\frac{x - c_i}{x} n \sigma_c$$

なお、上記手順の(3)~(6)の繰り返し計算に関しては、エクセルのソルバー機能を用いることにより、VBA によるプログラミングを行うことなく実行可能である。

4. 矩形 RC 断面曲げ応力算出エクセルに関して

表 4-1 に、矩形 RC 断面曲げ応力算出エクセルの画面を示す。

表中において、青の太字が入力データを示している。入力データは、以下の通りである。

- (1) 曲げモーメント M (kNm)
- (2) 軸力 N (kN) (圧縮正)
- (3) 断面高さ h (cm)
- (4) 断面幅 b (cm)
- (5) 鉄筋断面積 A_s (cm²) (段数分入力する)
- (6) 鉄筋被り c (cm) (圧縮縁からの距離、段数分入力する)

上記の鉄筋断面積および被りは、複数段数の入力が可能である。表 4-1 に示す画面では、5 段分までの入力が可能である。それ以上の段数を入力する場合は、6 段目以降に新たな行を挿入して作成する。その際、 $A \cdot y$ (換算断面積×腕の長さ)、 A (換算断面積)、 G (換算断面一次モーメント) および I (換算断面 2 次モーメント) の総和を再度作成する必要がある。

ここで、(1)の曲げモーメント M に負値を入力することはできない。負曲げを考慮する場合には、(6)の鉄筋被りを圧縮縁からの距離に変更する必要がある(元の被りを c としたとき、 $h-c$ (h : 断面高さ) に置き換える)。一方、(2)の軸力 N には引張力に対し負値を入力することが可能である。

断面諸元や断面力を変更して応力度計算を行う場合には、エクセルのソルバー機能を使用し、以下の操作を実行する。

- (1) 中立軸位置 x の数値 (赤字) として、初期値 $x=0$ を仮定する (中立軸が断面内にある場合)。
- (2) エクセルで「データ」→「ソルバー」をクリックし、「ソルバーのパラメーター」の表を出す。
- (3) 目的セルが $ABS(A-B)$ 、変数セルが x になっていることを確認する。(表 4-2 参照)
- (4) 目標値が「指定値」かつ「0」になっていることを確認する。(表 4-2 参照)
- (5) 制約条件の設定を確認する (現在の設定は $-10h \leq x \leq 10h$)。(表 4-2 参照)
- (6) 「解決」をクリックする。

表 4-1 に示す通り、赤太字が中立軸位置 x 、黒太字が発生応力を示す。発生応力のうち、コンクリート応力については圧縮縁での値を、鉄筋応力については鉄筋位置ごとの値を示している。

ソルバー機能を用いた計算手順は、中立軸位置 x を断面内の 0 から h (断面高さ) まで変動させ (中立軸が断面内にある場合)、式(9)の左辺値 $A=Gx$ と右辺値 $B=I_x \cdot N / (N \cdot (x-yc) + M)$ を計算し、 $ABS(A-B)=0$ となるように x を求めるということを意味している。そのため、目標セルを $ABS(A-B)$ 、変数セルを x に設定している。また、制限条件として $-10h \leq x \leq 10h$ を設定しているが、中立軸が断面外になる場合にも適応可能とするためである。

表 4-1 の計算例は、「下水道施設耐震計算例 2015 年版—処理場・ポンプ場編— 日本下水道協会」p2-53、表 3-4-1 の例題に対応するものである。

計算結果は、中立軸位置および発生応力ともに、上記文献の結果と一致を示した。

表 4-1 曲げ応力算出エクセル画面

入力データ											
ヤング係数比 n	15									偏心距離 e(cm)	189.5
曲げモーメント M(kNm)	42.83									圧縮線から図心までの距離 yc(cm)	15.3
軸力 N(kN)	22.6	A*y	A(cm ²)	G(cm ³)	I(cm ⁴)	発生応力(N/mm ²)					
断面高さ h(cm)	30	bh*h/2	bh	bx*x/2	bx ³ /3	$\sigma_c = (N(x-yc) + M) / I * x$ (圧縮正)					
断面幅 b(cm)	100	45000	3000	3779.1	21902.8	4.48				圧縮線から中立軸までの距離 x(cm)	8.694 変数セル
						コンクリート応力				A=G	438.7
						$\sigma_s = -(x-c) / x * \sigma_c * n$ (引張正)				B=I*N/(N*(x-yc)+M)	438.7
鉄筋 (番号)	断面積 As(cm ²)	被り c(cm)	nAs*c	nAs	nAs*(x-c)	nAs*(x-c) ²	鉄筋応力			ABS(A-B)	0.00094 目的セル
1	9.95	6	895.5	149.25	402.0	1083.003	-20.81				
2	16.3	24	5868	244.5	-3742.4	57281.76	118.27				
3											
4											
5											
	被り: 圧縮線からの距離		6763.5	393.75	-3340.3	58364.8					
			51763.5	3393.75	438.7	80267.6					

表 4-2 ソルバーのパラメーター画面

ソルバーのパラメーター

目的セルの設定:(I) \$N\$9 ↑

目標値: 最大値(M) 最小値(N) 指定値:(Y) 0

変数セルの変更:(B) \$N\$6 ↑

制約条件の対象:(U)

\$N\$6 <= \$C\$5*10
\$N\$6 >= -\$C\$5*10

制約条件の設定

中立軸位置 x の変動範囲を -10h ≤ x ≤ 10h に設定している (h : 断面高さ)

追加(A)

変更(C)

削除(D)

すべてリセット(R)

読み込み/保存(L)

制約のない変数を非負数にする(K)

解決方法の選択: GRG 非線形 オプション(P)

解決方法

滑らかな非線形を示すソルバー問題には GRG 非線形エンジン、線形を示すソルバー問題には LP シンプ
レックス エンジン、滑らかではない非線形を示すソルバー問題にはエボリューション エンジンを選択してく
ださい。

ヘルプ(H) 解決(S) 閉じる(O)

参考資料 分割法による曲げ応力度の算出

許容応力度照査における曲げ応力の算出は、多段配筋への対応を考慮し、道路橋示方書等に記載される分割法によることとする。これは、RC 部材断面の高さ方向に断面分割し、断面力と発生応力間の力の釣り合いから、分割要素と鉄筋の応力を算出するものである。以下では、分割法に基づく曲げ応力算出の定式について記載する。

曲げ応力の算出にあたり、以下の仮定を設けることとする。

- (1)部材断面内のひずみ分布は、部材高さ方向に直線分布とする。
- (2)コンクリートおよび鉄筋ともに弾性範囲内にあるものとし、断面力が作用した状態において、応力～ひずみ関係は線形関係を仮定する。
- (3)コンクリートの引張応力は無視する。
- (4)コンクリートのヤング係数 E_c に対する鉄筋のヤング係数 E_s の比 n (ヤング係数比 : $n=E_s/E_c$) は、 $n=15$ を仮定する。
- (5)部材断面内の軸方向鉄筋は、断面の幅方向に対称に配置されるものとする。
- (6)軸力は断面図心位置に作用する。

分割法を用いた RC 断面の応力度の算出の概略手順は、以下の通りである。

- (1)コンクリート発生応力および鉄筋発生応力を、コンクリート縁応力と中立軸位置 (圧縮縁からの距離 : x) で表す。
- (2)部材軸方向の直応力と軸力の釣り合い、および直応力によって発生するモーメントと曲げモーメントの釣り合いにより、コンクリート縁応力と中立軸位置を未知数とする 2 つの方程式を導入する。
- (3)上記 2 つの方程式よりコンクリート縁応力を消去し、中立軸位置に関する方程式を導入する。この方程式は、曲げモーメント M 、軸力 N' 、および中立軸位置 x として、 $f(M,N',x)=0$ なる一般式で表わすことができる。この方程式により、断面諸元 (断面寸法、鉄筋配置および鉄筋量) と断面力 (曲げモーメントおよび軸力) を定めると、中立軸位置 x を繰り返し計算によって算出できる。
- (4)断面諸元、断面力 M,N' および中立軸位置 x から、コンクリート圧縮縁応力および鉄筋の引張応力を算出する。

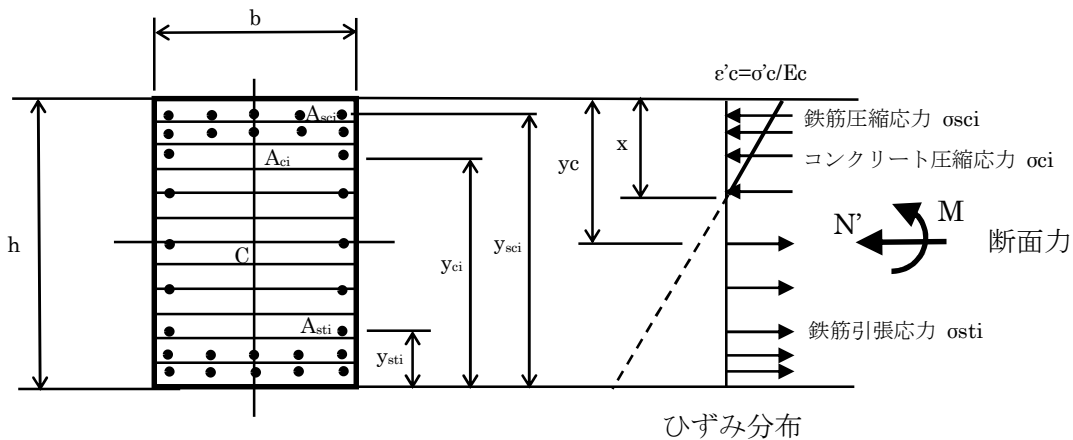


図 2-1 曲げ応力度の算出 (矩形断面)

<記号の意味>

h : 断面高さ (全高)

b : 断面幅

A_{ci} : i 番目の分割断面のコンクリート面積

A_{sci} : i 番目の鉄筋断面積 (圧縮側)

A_{sti} : i 番目の鉄筋断面積 (引張側)

A_{si} : i 番目の鉄筋断面積 (圧縮と引張を区別しない)

y_{ci} : i 番目の分割断面中心の座標 (引張縁からの距離)

y_{sci} : i 番目の鉄筋位置座標 (圧縮側、引張縁からの距離)

y_{sti} : i 番目の鉄筋位置座標 (引張側、引張縁からの距離)

y_{si} : i 番目の鉄筋位置座標 (圧縮と引張を区別しない、引張縁からの距離)

ε'_c : コンクリート圧縮縁のひずみ

σ'_c : コンクリート圧縮縁の応力

σ_{ci} : i 番目の分割断面のコンクリート応力 (圧縮側)

σ_{sci} : i 番目の鉄筋の応力 (圧縮側)

σ_{sti} : i 番目の鉄筋の応力 (引張側)

x : 中立軸位置の座標 (圧縮縁からの距離)

E_c : コンクリートヤング係数

E_s : 鉄筋ヤング係数

n : ヤング係数比 (=E_s/E_c : 許容応力度照査では n=15 を仮定)

y_c : 図心位置の圧縮縁からの距離

N' : 軸力 (圧縮力を正)

M : 曲げモーメント

まず、i 番目分割断面のコンクリート圧縮応力を求める。

コンクリート圧縮ひずみ ε'_c は、圧縮縁応力 σ'_c を用いて、次式で表される。

$$\varepsilon'_{ci} = \frac{x-h+y_{ci}}{x} \frac{\sigma'_c}{E_c}$$

また、コンクリート圧縮応力は、次式で表される。

$$\sigma'_{ci} = E_c \varepsilon'_{ci} = E_c \frac{x-h+y_{ci}}{x} \frac{\sigma'_c}{E_c} = \frac{x-h+y_{ci}}{x} \sigma'_c \quad (1)$$

$$\text{コンクリート圧縮力全体} = \sum_{i(c)} \frac{x-h+y_{ci}}{x} \sigma'_c A_{ci} \quad (2)$$

($\sum_{i(c)}$ は圧縮領域における総和を示す)

次に、i 番目の鉄筋に対する圧縮応力を求める。

鉄筋圧縮ひずみ ε'_{sci} は、圧縮縁応力 σ'_c を用いて、次式で表される。

$$\varepsilon'_{sci} = \frac{x-h+y_{sci}}{x} \frac{\sigma'_c}{E_c}$$

したがって、鉄筋圧縮応力は、次式で表される。

$$\sigma'_{sci} = E_s \varepsilon'_{sci} = E_s \frac{x-h+y_{sci}}{x} \frac{\sigma'_c}{E_c} = n\sigma'_c \frac{x-h+y_{sci}}{x} \quad (3)$$

$$\text{鉄筋圧縮応力全体} = \sum_{i(c)} n\sigma'_c \frac{x-h+y_{sci}}{x} A_{sci} \quad (4)$$

さらに、i 番目の鉄筋に対する引張応力を求める。

鉄筋引張ひずみ ε_{sti} は、圧縮縁応力 σ'_c を用いて、次式で表される。

$$\varepsilon_{sti} = \frac{h-x-y_{sti}}{x} \frac{\sigma'_c}{E_c}$$

したがって、鉄筋引張応力は、次式で表される。

$$\sigma_{sti} = E_s \varepsilon_{sti} = E_s \frac{h-x-y_{sti}}{x} \frac{\sigma'_c}{E_c} = n\sigma'_c \frac{h-x-y_{sti}}{x} \quad (5)$$

$$\text{鉄筋引張応力全体} = \sum_{i(t)} n\sigma'_c \frac{h-x-y_{sti}}{x} A_{sti} \quad (6)$$

($\sum_{i(t)}$ は引張領域における総和を示す)

以下では、以上の応力を用い、直応力と軸力の釣り合い条件、および直応力によるモーメントと曲げモーメントの釣り合い条件から、中立軸位置 x と圧縮縁応力 σ'_c を未知数とする方程式を導入する。

直応力と軸力の釣り合い条件より、式(2)、(4)および(6)を用いて次式を得る。

$$N' = \sum_{i(c)} \frac{x-h+y_{ci}}{x} \sigma'_c A_{ci} + \sum_{i(c)} n\sigma'_c \frac{x-h+y_{sci}}{x} A_{sci} - \sum_{i(t)} n\sigma'_c \frac{h-x-y_{sti}}{x} A_{sti}$$

すなわち、

$$N' = \sigma'_c \left[\sum_{i(c)} \frac{x-h+y_{ci}}{x} A_{ci} + \sum_{i(c)} \frac{x-h+y_{sci}}{x} nA_{sci} - \sum_{i(t)} \frac{h-x-y_{sti}}{x} nA_{sti} \right] \quad (7)$$

直応力によるモーメントと曲げモーメントに対し、中立軸位置回りのモーメントの釣り合いより、式(1)、(3)および(5)を用いて次式を得る。

$$\begin{aligned} M + N'(x - y_c) &= \sum_{i(c)} \frac{x-h+y_{ci}}{x} \sigma'_c A_{ci} \times (x-h+y_{ci}) + \sum_{i(c)} n\sigma'_c \frac{x-h+y_{sci}}{x} A_{sci} \times (x-h+y_{sci}) \\ &\quad + \sum_{i(t)} n\sigma'_c \frac{h-x-y_{sti}}{x} A_{sti} \times (h-x-y_{sti}) \end{aligned}$$

すなわち、

$$M + N'(x - y_c) = \sigma'_c \left[\sum_{i(c)} \frac{x-h+y_{ci}}{x} \sigma'_c A_{ci} \times (x-h+y_{ci}) + \sum_{i(c)} n\sigma'_c \frac{x-h+y_{sci}}{x} A_{sci} \times (x-h+y_{sci}) + \sum_{i(t)} n\sigma'_c \frac{h-x-y_{sti}}{x} A_{sti} \times (h-x-y_{sti}) \right] \quad (8)$$

式(7)および(8)より、 σ'_c を消去すれば、次式を得る。

$$\frac{M + N'(x - y_c)}{N'} = \frac{\sum_{i(c)}(x - h + y_{ci})^2 A_{ci} + \sum_{i(c)}(x - h + y_{sci})^2 nA_{sci} + \sum_{i(t)}(h - x - y_{sti})^2 nA_{sti}}{\sum_{i(c)}(x - h + y_{ci})A_{ci} + \sum_{i(c)}(x - h + y_{sci})nA_{sci} + \sum_{i(t)}(h - x - y_{sti})nA_{sti}}$$

すなわち、

$$\begin{aligned} N' \left[\sum_{i(c)} (x - h + y_{ci})^2 A_{ci} + \sum_{i(c)} (x - h + y_{sci})^2 nA_{sci} + \sum_{i(t)} (h - x - y_{sti})^2 nA_{sti} \right] \\ = \{M + N'(x - y_c)\} \left[\sum_{i(c)} (x - h + y_{ci})A_{ci} + \sum_{i(c)} (x - h + y_{sci})nA_{sci} + \sum_{i(t)} (h - x - y_{sti})nA_{sti} \right] \end{aligned}$$

N' と M に関して整理すれば、

$$\begin{aligned} N' \left[\sum_{i(c)} (x - h + y_{ci})(y_{ci} + y_c - h)A_{ci} + \sum_{i(c)} (x - h + y_{sci})(y_{sci} + y_c - h)nA_{sci} \right. \\ \left. + \sum_{i(t)} (h - x - y_{sti})(h - y_{sti} - y_c)nA_{sti} \right] \\ - M \left[\sum_{i(c)} (x - h + y_{ci})A_{ci} + \sum_{i(c)} (x - h + y_{sci})nA_{sci} - \sum_{i(t)} (h - x - y_{sti})nA_{sti} \right] = 0 \end{aligned}$$

さらに、

$$\begin{aligned} \sum_{i(c)} \{N'(y_{ci} + y_c - h) - M\}(x - h + y_{ci})A_{ci} + \sum_{i(c)} \{N'(y_{sci} + y_c - h) - M\}(x - h + y_{sci})nA_{sci} \\ + \sum_{i(t)} \{N'(y_{sti} + y_c - h) - M\}(x - h + y_{sti})nA_{sti} = 0 \end{aligned}$$

ここで、上式の第2項および第3項の鉄筋対象部分について、圧縮側と引張側を区別せず、座標および面積をそれぞれ y_{si} および A_{si} とすれば、中立軸位置 x を求める方程式として次式を得る。

多段配筋矩形 RC 断面の中立軸算定式

$$\sum_{i(c)} \{N'(y_{ci} + y_c - h) - M\}(x - h + y_{ci})A_{ci} + \sum_{i(c+t)} \{N'(y_{si} + y_c - h) - M\}(x - h + y_{si})nA_{si} = 0$$

($\sum_{i(c+t)}$ は圧縮および引張両方の領域における総和を示す) (9)

コンクリート圧縮縁応力 σ'_c は、式(8)を用いて、次式で算出できる。

$$\sigma'_c = \frac{M + N'(x - y_c)}{\sum_{i(c)} \frac{(x - h + y_{ci})^2}{x} A_{ci} + \sum_{i(c+t)} \frac{(x - h + y_{si})^2}{x} nA_{si}} \quad (10)$$

また、圧縮鉄筋応力および引張鉄筋応力は、式(1)および(3)を用いて、次式で算出される。

$$\sigma'_{sci} = n\sigma'_c \frac{x - h + y_{sci}}{x}, \quad \sigma'_{sti} = n\sigma'_c \frac{h - x - y_{sti}}{x} \quad (11)$$

以上より、式(9)が中立軸位置 x の算出の方程式、式(10)がコンクリート圧縮縁の応力度の算出式、そして式(11)が鉄筋の応力度の算出式となる。

【参考文献】

- (1)日本建築学会：鉄筋コンクリート構造計算規準・同解説 2018年12月
- (2)日本下水道協会：下水道施設耐震計算例 2015年版－処理場・ポンプ場編－