多段配筋矩形断面に対するMφ限界値算出のエクセルマクロ（その2）

日中構造研究所　松原勝己

1. はじめに

先に、「多段配筋矩形断面に対するMφ限界値算出のエクセルマクロ」において、梁要素のMφ関係の限界値を算出するマクロを示した。そこでは、コ示（道示Ⅲ）に提示されるコンクリート応力ひずみ関係を使用し、分割法によらず圧縮応力総和を解析式によって求めることでMφ関係の算出を行った。

本報でも同様の方法を用い、道示Ⅴに提示される横拘束筋の拘束効果を考慮したコンクリート応力ひずみ関係を適用したときのMφ関係算出を実施した。

道示Ⅴでは、終局時の限界状態として2種の場合、すなわち(1)最外圧縮鉄筋位置におけるコンクリート圧縮ひずみが限界圧縮ひずみ(ε_{ccl})に達するとき（圧縮限界）、(2)最外引張鉄筋の引張ひずみが限界引張ひずみ($\varepsilon_{st2}, \varepsilon_{st3}$)に達するとき（引張限界）を考慮し、それぞれの状態における曲率が小さい方の曲げモーメントおよび曲率を限界値として設定することとしている。したがって、本マクロではひび割れ時、初期降伏時、圧縮限界時および引張限界時の曲げモーメントおよび曲率をMφ限界値として考慮した。以下では、これらのMφ限界値の算出手順とエクセルでの入出力データについて記載する。

なお、掲載したエクセルマクロは自由に使用していただいて結構ですが、結果の妥当性判断については使用者に委ねることとします。また、ソースコードについても公開しています。

2. Mφ限界値の算出手順

2.1 圧縮限界時のMφ

2.1.1 圧縮限界時Mφの算出手順の概要

圧縮限界時Mφの算出手順概要は、以下の通りである。

(1) 断面諸元、すなわち、断面高さh、断面幅b、コンクリートおよび鉄筋のヤング係数Ec,Es、コンクリート強度fc、鉄筋降伏強度fy、鉄筋の被りdi、鉄筋量Asiおよび作用軸力N（圧縮正）を設定する。

(2) 拘束効果を考慮する横拘束筋に関する諸元や引張鉄筋の限界引張ひずみを決定するための諸元を設定する。すなわち、横拘束筋呼び径（断面積および断面2次モーメント）、横拘束筋の有効長、横拘束筋ピッチ、横拘束筋降伏強度、軸方向筋呼び径（直径）、塑性ヒンジ長（Lp）算出時圧縮側軸方向筋本数、Lp算出時の横拘束筋有効長、およびLp算出時の被りを設定する。

(3) 圧縮限界時（最外圧縮鉄筋位置において限界圧縮ひずみに達した時点）における中立軸比kuを仮定する。kuは、圧縮縁から最外引張鉄筋までの距離dnに対する中立軸位置xu（圧縮縁からの距離）の比ku=xu/dnで定義する。中立軸は有効断面内に存在することを前提に、最初のkuの仮定値として、ku1=gam(1)+0.0001とする。ここに、gam(1)=d1/dn（d1：最外圧縮鉄筋のかぶり）であり、このようにku1を設定したのは、最外圧縮鉄筋より外側の圧縮応力を無視することを考慮したためである。

(4) (3)の条件、すなわち最外圧縮鉄筋位置において限界圧縮ひずみとなること、および仮定したku

の値から圧縮限界時の直ひずみ分布を設定する。

(5) (4)による直ひずみ分布と鉄筋降伏ひずみ εy（=fy/Es）から、圧縮降伏、未降伏および引張降伏した鉄筋の判別を行う。本マクロではパラメータ i1 および i2 を定義し、第 1 段から i1 段までを圧縮降伏した鉄筋、第 i2 段から n 段（n：全鉄筋段数）までを引張降伏した鉄筋、それ以外の i1+1 段から i2-1 段までを未降伏の鉄筋と判定する。

(6) (5)による鉄筋の降伏判定をもとに、鉄筋による引張あるいは圧縮応力を求める。すなわち、降伏している場合には鉄筋降伏強度 fy とし、未降伏の場合には直ひずみに鉄筋ヤング係数を乗じた応力とする。さらに、鉄筋応力の鉄筋断面積を乗じて、それぞれの段の鉄筋力を求め、全ての段の鉄筋力の合計値 Ps（Ps：圧縮正）を求める。

(7) コンクリート引張応力は無視することを前提に、(4)の圧縮ひずみ分布から圧縮限界時のコンクリート圧縮合力 Pc（Pc：圧縮正）を求める。圧縮限界時の Pc は、コンクリートヤング係数 Ec、コンクリート応力ピーク時ひずみ εcc、断面幅 b、最外圧縮鉄筋位置から中立軸位置までの距離(xu-d1)、コンクリート応力ひずみ関係におけるべき乗定数 n、コンクリート応力ひずみ関係の下降勾配 Edes および β で表すことができる。ここに、β はピーク時ひずみ εcc に対する限界圧縮ひずみ εccl の比（β = εccl/ εcc）である。（Pc の算出式については後述）

(8) (6)と(7)の計算結果および軸方向応力と軸力 N の釣り合い条件を考慮し、軸応力総 SU1=Ps+Pc-N を計算する。

(9) 上記の(3)～(8)までの計算を、中立軸比 ku2=0.9999 に対して実施し、軸応力総和 SU2 を計算する。

(10) (8)および(9)の SU1 と SU2 の符号が反転しているとき（SU1･SU2<0）、ku1～ku2 の間の中立軸位置の解が存在すると判断する。（有効断面内に中立軸の解が 1 個存在することを仮定）

(11) 以後、より正確な中立軸位置を求めるために、2 分法による収束計算を適用する。ku3=(ku1+ku2)/2 に対する軸応力総和 SU3 を求める。SU1 と SU3 の符号が反転したとき、ku2 を ku3 に置き換える。SU1 と SU3 の符号が反転しないとき、ku1 を ku3 に、SU1 を SU3 に置き換える。同様の計算を繰り返し、ABS((ku3-ku1)/ku3)<ε（ε：収束誤差）のとき、収束計算を終了し、ku3 を圧縮限界時の ku とする。

(12) 中立軸位置 xu を xu=ku･dn（dn：圧縮縁から最外引張鉄筋までの距離）により算出する。また、圧縮限界時の曲率 φu を φu= εccl/(xu-d1)（d1：最外圧縮鉄筋の被り）により求める。

(13) 鉄筋力に中立軸位置からの距離 xu-di（di：圧縮縁から第 i 段鉄筋までの距離）を乗じて鉄筋力によるモーメントを求め、全ての段のモーメントを合計することで中立軸周りのモーメント Ms（左周りを正）を計算する。

(14) コンクリート圧縮合力による中立軸周りのモーメント Mc（左周りを正）を求める。圧縮限界時の Mc は、コンクリートヤング係数 Ec、コンクリート応力ピーク時ひずみ εcc、断面幅 b、最外圧縮鉄筋位置から中立軸位置までの距離(xu-d1)、コンクリート応力ひずみ関係におけるべき乗定数 n、コンクリート応力ひずみ関係の下降勾配 Edes および β で表すことができる。ここに、β はコンクリート応力ピーク時のひずみ εcc に対する限界圧縮ひずみ εccl の比（β = εccl/ εcc）である。（Mc の算出式については後述）

(15)　中立軸周りのモーメントの釣り合いから、圧縮限界時の曲げモーメント Mu が、Mu=Ms+Mc+N(yc-xu)により算出できる。ここに、yc は圧縮縁から軸力作用位置までの距離であり、本マクロでは yc=h/2（断面中心）とした。

2.1.2 圧縮限界時 Mφの算出式

(1)鉄筋の降伏判定

図 2-1 に、圧縮限界時の断面仮定を示す。

図 2-1 のひずみ分布を参照し、第 i 段鉄筋のひずみ ε i（引張正）が次式で表される。

$$\frac{-\varepsilon_i}{x_u-d_i}=\frac{\varepsilon_{ccl}}{x_u-d_1}$$

すなわち、

$$\varepsilon_i=\frac{d_i-x_u}{x_u-d_1}\varepsilon_{ccl} \tag{1}$$

ここに、d1：最外圧縮鉄筋の被り

xu：圧縮限界時の中立軸位置（圧縮縁からの距離）

di：第 i 段の鉄筋被り（圧縮縁からの距離）

ε ccl：コンクリートの限界圧縮ひずみ（参考資料の式(参 11)による）

以下では、式(1)を用い、圧縮限界時に鉄筋が未降伏あるいは降伏するときの条件を求める。

鉄筋が未降伏のとき、鉄筋降伏ひずみを ε y(=fy/Es)とすれば、次式が成立する。

$$-\varepsilon_y<\varepsilon_i<\varepsilon_y \tag{2}$$

式(2)に式(1)を代入すれば、次式を得る。

$$-\varepsilon_y<\frac{d_i-x_u}{x_u-d_1}\varepsilon_{ccl}<\varepsilon_y \tag{3}$$

ここで、$k_u=\frac{x_u}{d_n}$　$\gamma_i=\frac{d_i}{d_n}$　$\gamma_1=\frac{d_1}{d_n}$　$\alpha=\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_{ccl}}$　を定義すれば、式(3)から次式が得られる。

$$-\alpha<\frac{\gamma_i-k_u}{k_u-\gamma_1}<\alpha \tag{4}$$

ku>γ i を仮定し、式(4)をγ i の条件式に書き換えれば、次式を得る。

$$k_u(1-\alpha)+\alpha\gamma_1<\gamma_i<k_u(1+\alpha)-\alpha\gamma_1 \tag{5}$$

式(5)が未降伏の条件となり、中立軸比 ku が既知のとき、式(5)により未降伏あるいは降伏するときの鉄筋段数を定めることができる。

ここで、第 1 段から i1 段までが圧縮降伏、i1+1 段から i2-1 段までが未降伏、i2 段から n 段までが引張降伏になるように、パラメータ i1 および i2 を定義する。式(5)を考慮すれば、i1 および i2 は以下の通り求められる。

$i1:\ \gamma_i<k_u(1-\alpha)+\alpha\gamma_1$　を満足する最大の i　(6)

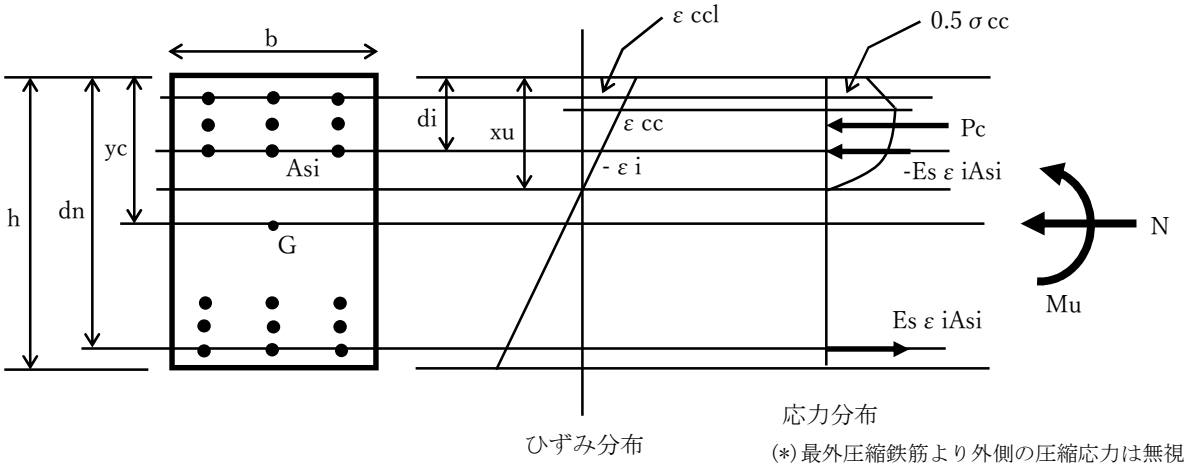
$i2:\ \gamma_i>k_u(1+\alpha)-\alpha\gamma_1$　を満足する最小の i　(7)

ここに、ku：圧縮限界時の中立軸比（=xu/dn）

γi：最外引張鉄筋の圧縮縁からの距離に対する第 i 段鉄筋の圧縮縁からの距離の比（=di/dn）

γ1：最外引張鉄筋の圧縮縁からの距離に対する最外圧縮鉄筋の被りの比（=d1/dn）

α ：コンクリート限界圧縮ひずみに対する鉄筋降伏ひずみの比（= ε y/ ε ccl）



【記号】

h：断面高さ

b：断面幅

dn：圧縮縁から最外引張鉄筋までの距離

yc：圧縮縁から軸力作用位置までの距離（=h/2）

di：第 i 段鉄筋の被り（圧縮縁からの距離）

Asi：第 i 段鉄筋の鉄筋量

xu：圧縮限界時の中立軸位置（圧縮縁からの距離）

ku：圧縮限界時の中立軸比（=xu/dn）

ε ccl：コンクリートの限界圧縮ひずみ（正値）

ε cc：コンクリートのピーク時ひずみ（正値）

σ cc：コンクリートのピーク時応力（正値）

ε i：第 i 段鉄筋のひずみ（引張正）

ε y：鉄筋降伏ひずみ（=fy/Es）

σ ck：コンクリート設計基準強度

fy：鉄筋降伏強度

Ec：コンクリートヤング係数

Es：鉄筋ヤング係数

Pc：コンクリート圧縮応力の合力値

N：軸力（圧縮正）

Mu：圧縮限界時の曲げモーメント（下面側引張正）

図 2-1　圧縮限界時の断面仮定

(2) 中立軸比 ku の算出

中立軸比 ku を定めるために、軸方向応力と軸力との釣り合い式を考慮する。
鉄筋力の合計値 Ps（圧縮正）は、次式で書くことができる。

$$P_S = \sum_i(-E_S\varepsilon_i A_{si}) = \sum_i E_S A_{si}\frac{x_u - d_i}{x_u - d_1}\varepsilon_{ccl} = \sum_i E_S A_{Si}\frac{k_u - \gamma_i}{k_u - \gamma_1}\varepsilon_{ccl} \quad (8)$$

式(8)は、鉄筋が未降伏のときの鉄筋力合計値であるが、未降伏および降伏の鉄筋が混在する場合には、以下の式となる。すなわち、鉄筋ひずみが ε y を超えたときは、鉄筋応力を降伏応力 fy とすれば、次式を得る。

$$P_S = \sum_{i=1}^{i1} A_{Si}f_y - \sum_{i=i2}^{n} A_{Si}f_y + \sum_{i=i1+1}^{i2-1} E_S A_{Si}\frac{k_u - \gamma_i}{k_u - \gamma_1}\varepsilon_{ccl} \quad (9)$$

ここに、i1,i2：式(6)および(7)
Asi：第 i 段鉄筋の鉄筋量
fy：鉄筋降伏応力
Es：鉄筋ヤング係数
ku：圧縮限界時の中立軸比
（=xu/dn、xu：圧縮限界時の中立軸位置、dn：圧縮縁から最外引張鉄筋までの距離）
γi：最外引張鉄筋の圧縮縁からの距離に対する第 i 段鉄筋の圧縮縁からの距離の比（=di/dn）
γ_1:最外引張鉄筋の圧縮縁からの距離に対する最外圧縮鉄筋の圧縮縁からの距離の比(=d_1/dn)
ε ccl：コンクリートの限界圧縮ひずみ（参考資料の式(参 11)による）

コンクリート圧縮応力の合力値 Pc（圧縮正）は、参考資料の式(参 46)を参照し、コンクリートヤング係数 Ec、コンクリート応力ピーク時ひずみ ε cc、断面幅 b、最外圧縮鉄筋位置から中立軸位置までの距離(xu-d_1)、コンクリート応力ひずみ関係におけるべき乗定数 n、コンクリート応力ひずみ関係の下降勾配 Edes およびピーク時ひずみに対する限界圧縮ひずみ ε cc の比 β (= ε ccl/ ε cc)で表すことができる。具体的には、式(参 46)の r>1 の場合において、r に β を、x に xu-d_1 を代入した式を用いる。これは、道示Ⅴにおいては最外圧縮鉄筋位置において限界圧縮ひずみに達するときを圧縮限界と定義されているためである。以上から、Pc は以下の式で与えられる。

$$P_c = \left[\frac{(n+2)(n-1)}{2n(n+1)} + \frac{\beta-1}{2}\left\{\frac{2(n-1)}{n} - \frac{E_{des}}{E_c}(\beta-1)\right\}\right]\frac{1}{\beta}E_c\varepsilon_{cc}b(x_u - d_1) \quad (10)$$

ここに、n：応力ひずみ関係のべき乗定数（参考資料の式(参 2)による）
β ：ピーク時ひずみ ε cc に対する限界圧縮ひずみ ε clc の比（= ε ccl/ ε cc）
ε cc：ピーク時ひずみ（参考資料の式(参 4)による）
ε ccl：限界圧縮ひずみ（参考資料の式(参 11)による）
Ec：コンクリートヤング係数
Edes：応力ひずみ関係の下降勾配（参考資料の式(参 5)による）
b：断面幅
xu：圧縮限界時の中立軸位置（圧縮縁からの距離、=ku･dn）
dn：圧縮縁から最外引張鉄筋までの距離
d_1：最外圧縮鉄筋のかぶり（圧縮縁からの距離）

式(9)および式(10)を用い、軸方向応力の総和と軸力との釣り合い式は、次式の通り書くことができる。

$$P_S + P_C - N = 0 \tag{11}$$

圧縮限界時の中立軸比 ku を仮定すれば、式(11)の左辺を計算することができるので、繰り返し計算により、式(11)の左辺の符号が反転するときの ku を求めれば、圧縮限界時の中立軸比が算出できる。

圧縮限界時の曲率 ϕ u は、次式で得られる。

$$\varphi_u = \frac{\varepsilon_{ccl}}{x_u - d_1} \tag{12}$$

ここに、xu=ku･dn

dn：圧縮縁から最外引張鉄筋までの距離

d_1：最外圧縮鉄筋のかぶり（圧縮縁からの距離）

(3) 圧縮限界時の曲げモーメント Mu の算出

圧縮限界時の曲げモーメント Mu を求めるために、中立軸周りのモーメントの釣り合いを考慮する。

中立軸周りの断面力によるモーメント（外力モーメント）と中立軸周りの鉄筋およびコンクリートによるモーメント（内力モーメント）を等値することで、次式を得る。

$$M_u - N(y_c - x_u) = M_S + M_c$$

すなわち、

$$M_u = M_S + M_c + N(y_c - x_u) \tag{13}$$

ここに、Mu：圧縮限界時の曲げモーメント（下面側引張正、左周り正）

Ms：鉄筋力による中立軸周りのモーメント（左周り正）

Mc：コンクリート圧縮力による中立軸周りのモーメント（左周り正）

N：軸力（圧縮正）

yc：圧縮縁から軸力作用位置までの距離（=h/2）

xu：圧縮限界時の中立軸位置（圧縮縁からの距離）

式(13)における Ms は、次式の通りである。

$$M_S = \sum_{i=1}^{i1} A_{si} f_y (x_u - d_i) + \sum_{i=i2}^{n} A_{si} f_y (d_i - x_u) + \sum_{i=i1+1}^{i2-1} E_S A_{si} \frac{k_u - \gamma_i}{k_u - \gamma_1} \varepsilon_{ccl} (x_u - d_i) \tag{14}$$

ここに、i1,i2：式(6),(7)

Asi：第 i 段鉄筋の鉄筋量

fy：鉄筋降伏強度

xu：圧縮限界時の中立軸位置（=ku･dn、dn：最外引張鉄筋の圧縮縁からの距離）

di：第 i 段鉄筋のかぶり（圧縮縁からの距離）

Es：鉄筋ヤング係数

ku：圧縮限界時の中立軸比

γ i：dn に対する第 i 段鉄筋のかぶりの比（=di/dn）

γ 1：最外引張鉄筋の圧縮縁からの距離に対する最外圧縮鉄筋の圧縮縁からの距離の比（=d_1/dn）

ε ccl：限界圧縮ひずみ（参考資料の式(参 11)による）

また、式(13)における Mc は、参考資料の式(参 47)を参照し、r>1 の場合において、r にβを、x に xu-d_1 を代入した式を用いる。これは、道示Ⅴにおいては最外圧縮鉄筋位置において限界圧縮ひずみに達するときを圧縮限界と定義されているためである。以上から、Mc は以下の式で与えられる。

$$M_c = \left[\frac{(n+3)(n-1)}{3n(n+2)} + \frac{\beta-1}{6}\left\{\frac{3(n-1)}{n}(\beta+1) - \frac{E_{des}}{E_c}(\beta-1)(2\beta+1)\right\}\right]\frac{1}{\beta^2}E_c\varepsilon_{cc}b(x_u-d_1)^2 \qquad (15)$$

ここに、n：応力ひずみ関係のべき乗定数（参考資料の式(参 2)による）

β：ピーク時ひずみ ε cc に対する限界圧縮ひずみ ε ccl の比（= ε ccl/ ε cc）

ε cc：ピーク時ひずみ（参考資料の式(参 4)による）

ε ccl：限界圧縮ひずみ（参考資料の式(参 11)による）

Ec：コンクリートヤング係数

Edes：応力ひずみ関係の下降勾配（参考資料の式(参 5)による）

b：断面幅

xu：圧縮限界時の中立軸位置（圧縮縁からの距離、=ku･dn）

dn：圧縮縁から最外引張鉄筋までの距離

d_1：最外圧縮鉄筋のかぶり（圧縮縁からの距離）

圧縮限界時の中立軸位置 xu が既知のとき、式(13)～(15)により、圧縮限界時の曲げモーメントを求めることができる。

2.2 降伏時の Mφ

2.2.1 降伏時 Mφ 算出手順の概要

降伏時 Mφ 算出手順の概要は、以下の通りである。

(1) 断面諸元、すなわち、断面高さ h、断面幅 b、コンクリートおよび鉄筋のヤング係数 Ec,Es、コンクリート強度 fc、鉄筋降伏強度 fy、鉄筋の被り di、鉄筋量 Asi および作用軸力 N（圧縮正）を設定する。

(2) 拘束効果を考慮する横拘束筋に関する諸元や引張鉄筋の限界引張ひずみを決定するための諸元を設定する。すなわち、横拘束筋呼び径（断面積および断面 2 次モーメント）、横拘束筋の有効長、横拘束筋ピッチ、横拘束筋降伏強度、軸方向筋呼び径（直径）、塑性ヒンジ長（Lp）算出時圧縮側軸方向筋本数、Lp 算出時の横拘束筋有効長、および Lp 算出時の被りを設定する。

(3) 降伏時（最外引張鉄筋において鉄筋降伏ひずみ ε y に達した時点）における中立軸比 ky を仮定する。ky は、圧縮縁から最外引張鉄筋までの距離 dn に対する中立軸位置 xy（圧縮縁からの距離）の比 ky=xy/dn で定義する。中立軸は有効断面内に存在することを前提に、kys～kye までを探索する。ここに、kys=0.0001、kye=0.9999 である。仮定する ky は、kys から kye までを 100 等分したそれぞれの値とする、したがって、101 個の仮定した ky に対して、以下の探索を行う。

(4) (3)の条件、すなわち最外引張鉄筋において鉄筋降伏ひずみ ε y となること、および仮定した ky の値から降伏時の直ひずみ分布を設定する。

(5) (4)による直ひずみ分布と鉄筋降伏ひずみ ε y（=fy/Es）から、圧縮降伏、未降伏および引張降伏した鉄筋の判別を行う。本マクロではパラメータ i1y を定義し、第 1 段から i1y 段までを圧縮降伏した鉄筋、第 n 段（n：全鉄筋段数）を引張降伏した鉄筋、それ以外の i1y+1 段から n-1 段までを未降伏の鉄筋と判定する。

(6) (5)による鉄筋の降伏判定をもとに、鉄筋による引張あるいは圧縮応力を求める。すなわち、降伏している場合には鉄筋降伏強度 fy とし、未降伏の場合には直ひずみに鉄筋ヤング係数を乗じた応力とする。さらに、鉄筋応力の鉄筋断面積を乗じて、それぞれの段の鉄筋力を求め、全ての段の鉄筋力の合計値 Ps（Ps：圧縮正）を求める。

(7) コンクリート引張応力は無視することを前提に、(4)の圧縮ひずみ分布から降伏時のコンクリート圧縮合力 Pc（Pc：圧縮正）を求める。降伏時の Pc は、コンクリートヤング係数 Ec、コンクリート応力ピーク時ひずみ ε cc、断面幅 b、圧縮縁から中立軸位置までの距離 xy、コンクリート応力ひずみ関係におけるべき乗定数 n、コンクリート応力ひずみ関係の下降勾配 Edes および r で表すことができる。ここに、r はピーク時ひずみ ε cc に対する圧縮縁ひずみ ε c の比（r= ε c/ ε cc）である。（Pc の算出式については後述）

(8) (6)と(7)の計算結果および軸方向応力と軸力 N の釣り合い条件を考慮し、軸応力総和 Ps+Pc-N を、(3)の 101 個の ky に対して計算する。その中で軸応力総和の符号が反転するときの 2 点の ky を ky1 と ky2 とし、また軸応力総和を SY1 と SY2 とする。

(9) (8)の計算により、ky1 と ky2 の間に中立軸位置の解があると判断し、(10)の収束計算に移行する。

(10) 以後、より正確な中立軸位置を求めるために、2 分法による収束計算を適用する。ky3=(ky1+ky2)/2 に対する軸応力総和 SY3 を求める。SY1 と SY3 の符号が反転したとき、ky2 を ky3 に置き換える。SY1 と SY3 の符号が反転しないとき、ky1 を ky3 に、SY1 を SY3 に置き換える。同様の計算を繰り返し、ABS((ky3-ky1)/ky3)< ε （ ε ：収束誤差）のとき、収束計算を終了し、ky3 を降伏時の ky とする。

(11) 中立軸位置 xy を xy=ky･dn（dn：圧縮縁から最外引張鉄筋までの距離）により算出する。また、降伏曲率 φ y を φ y= ε y/(dn-xy)により求める。

(12) 鉄筋力に中立軸位置からの距離 xy-di（di：圧縮縁から第 i 段鉄筋までの距離）を乗じて鉄筋力によるモーメントを求め、全ての段のモーメントを合計することで中立軸周りのモーメント Ms（左周りを正）を計算する。

(13) コンクリート圧縮合力による中立軸周りのモーメント Mc（左周りを正）を求める。降伏時の Mc は、降伏時のコンクリートヤング係数 Ec、コンクリート応力ピーク時ひずみ ε cc、断面幅 b、圧縮縁から中立軸位置までの距離 xy、コンクリート応力ひずみ関係におけるべき乗定数 n、コンクリート応力ひずみ関係の下降勾配 Edes および r で表すことができる。ここに、r はピーク時ひずみ ε cc に対する圧縮縁ひずみ ε c の比（r= ε c/ ε cc）である。（Mc の算出式については後述）

(14) 中立軸周りのモーメントの釣り合いから、降伏曲げモーメント My が、My=Ms+Mc+N(yc-xy)により算出できる。ここに、yc は圧縮縁から軸力作用位置までの距離であり、本マクロでは yc=h/2（断面中心）とした。

2.2.2 降伏時 Mφの算出式

(1)鉄筋の降伏判定

図 2-2 に、降伏時の断面仮定を示す。

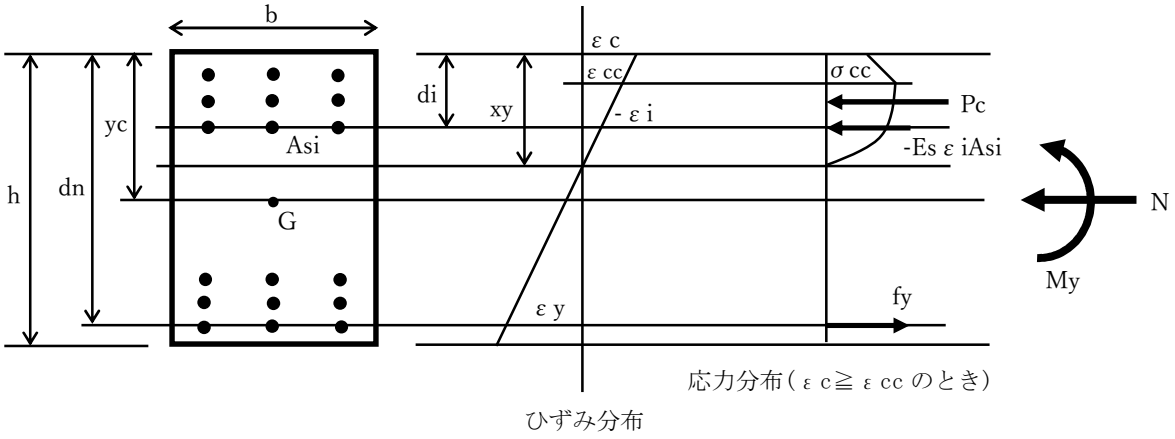


図 2-2　降伏時の断面仮定

【記号】

h：断面高さ

b：断面幅

dn：圧縮縁から最外引張鉄筋までの距離

yc：圧縮縁から軸力作用位置までの距離（=h/2）

di：第 i 段鉄筋の被り（圧縮縁からの距離）

Asi：第 i 段鉄筋の鉄筋量

xy：降伏時の中立軸位置（圧縮縁からの距離）

ky：降伏時の中立軸比（=xy/dn）

ε c：コンクリートの圧縮縁ひずみ（正値）

ε cc：最大圧縮応力に達したときのひずみ（正値）

σ cc：最大圧縮応力（正値）

ε i：第 i 段鉄筋のひずみ（引張正）

ε y：鉄筋降伏ひずみ（=fy/Es）

fy：鉄筋降伏強度

Ec：コンクリートヤング係数

Es：鉄筋ヤング係数

Pc：コンクリート圧縮応力の合力値

N：軸力（圧縮正）

My：降伏曲げモーメント（下面側引張正）

図 2-2 のひずみ分布を参照し、第 i 段鉄筋のひずみ εi（引張正）および圧縮縁ひずみ εc（正値）が次式で表される。

$$\frac{-\varepsilon_i}{x_y-d_i}=\frac{\varepsilon_y}{d_n-x_y}$$

$$\frac{\varepsilon_c}{x_y}=\frac{\varepsilon_y}{d_n-x_y}$$

すなわち、

$$\varepsilon_i=\frac{d_i-x_y}{d_n-x_y}\varepsilon_y \tag{16}$$

$$\varepsilon_c=\frac{x_y}{d_n-x_y}\varepsilon_y=\frac{k_y}{1-k_y}\varepsilon_y \tag{17}$$

ここに、ky：降伏時の中立軸比（=xy/dn）

以下では、式(16)を用い、降伏時の鉄筋が未降伏か降伏するときの条件を求める。

鉄筋が未降伏のとき、鉄筋降伏ひずみを εy(=fy/Es)とすれば、次式が成立する。

$$-\varepsilon_y<\varepsilon_i<\varepsilon_y \tag{18}$$

式(18)に式(16)を代入すれば、次式を得る。

$$-\varepsilon_y<\frac{d_i-x_y}{d_n-x_y}\varepsilon_y<\varepsilon_y \tag{19}$$

ここで、$k_y=\frac{x_y}{d_n}$　$\gamma_i=\frac{d_i}{d_n}$ を定義し、γi の条件で書けば次式が得られる。

$$2k_y-1<\gamma_i<1 \tag{20}$$

式(20)のγi<1 の条件は、最外引張鉄筋のみが引張降伏することを意味するので、自明な条件となる。すなわち、最外引張鉄筋が引張降伏し、それ以外の鉄筋は未降伏あるいは圧縮降伏となる。

したがって、未降伏の条件として、以下を採用する。

$$\gamma_i>2k_y-1 \tag{21}$$

式(21)により、中立軸比 ky が既知のとき、未降伏あるいは圧縮降伏の鉄筋段数を定めることができる。

ここで、第 1 段から i1y 段までが圧縮降伏、i1y+1 段から n-1 段までが未降伏、第 n 段（n：全鉄筋段数）が引張降伏とするパラメータ i1y を定義する。式(21)を考慮すれば、i1y が以下の通り求めることができる。

$$i1y：\gamma_i<2k_y-1 \text{ を満足する最大の i} \tag{22}$$

ここに、ky：降伏時の中立軸比（=xy/dn）

γi：最外引張鉄筋の圧縮縁からの距離に対する第 i 段鉄筋の圧縮縁からの距離（=di/dn）

(2) 中立軸比 ky の算出

中立軸比 ky を定めるために、軸方向応力と軸力の釣り合い式を考慮する。

鉄筋力の合計値 Ps（圧縮正）は、次式で書くことができる。

$$P_S = \sum_i(-E_S\varepsilon_i A_{si}) = \sum_i E_S A_{si}\frac{x_y - d_i}{d_n - x_y}\varepsilon_y = \sum_i E_S A_{Si}\frac{k_y - \gamma_i}{1-k_y}\varepsilon_y \quad (23)$$

式(23)は、鉄筋が未降伏のときの鉄筋力合計値であるが、未降伏および降伏の鉄筋が混在する場合には、以下の式となる。すなわち、鉄筋ひずみがεyを超えたときは、鉄筋応力を降伏応力fyとすれば、次式を得る。

$$P_S = \sum_{i=1}^{i1y} A_{Si}f_y - A_{Sn}f_y + \sum_{i=i1y+1}^{n-1} E_S A_{Si}\frac{k_y - \gamma_i}{1-k_y}\varepsilon_y \quad (24)$$

ここに、i1y：式(21)

Asi：第i段鉄筋の鉄筋量

fy：鉄筋降伏応力

Es：鉄筋ヤング係数

ky：降伏時の中立軸比

（=xy/dn、xy：降伏時の中立軸位置、dn：圧縮縁から最外引張鉄筋までの距離）

γi：最外引張鉄筋の圧縮縁からの距離に対する第i段鉄筋の圧縮縁からの距離の比（=di/dn）

εy：鉄筋降伏ひずみ（=fy/Es）

コンクリート圧縮応力の合力値Pc（圧縮正）は、参考資料の式(参46)を参照し、応力ひずみ関係のべき乗定数n、ピーク時ひずみεccに対する圧縮縁ひずみεcの比r（=εc/εcc）、コンクリートヤング係数Ec、ピーク時ひずみεcc、断面幅b、圧縮縁から中立軸位置までの距離xy、および下降勾配Edesにより表すことができる。

$$P_c = \begin{cases} \dfrac{n(n+1)r - 2r^n}{2n(n+1)} E_c\varepsilon_{cc} b x_y & (r \le 1) \\ \left[\dfrac{(n+2)(n-1)}{2n(n+1)} + \dfrac{r-1}{2}\left\{\dfrac{2(n-1)}{n} - \dfrac{E_{des}}{E_c}(r-1)\right\}\right]\dfrac{1}{r} E_c\varepsilon_{cc} b x_y & (r > 1) \end{cases} \quad (25)$$

ここに、n：応力ひずみ関係のべき乗定数（参考資料の式(参2)による）

r：ピーク時ひずみεccに対する圧縮縁ひずみεcの比（=εc/εcc）

εc：圧縮縁ひずみ（式(17)による）

εcc：ピーク時ひずみ（参考資料の式(参4)による）

Ec：コンクリートヤング係数

Edes：応力ひずみ関係の下降勾配（参考資料の式(参5)による）

b：断面幅

xy：降伏時の中立軸位置（圧縮縁からの距離、=ky･dn）

dn：圧縮縁から最外引張鉄筋までの距離

式(25)における r の算出には、圧縮縁ひずみεcが必要になるが、kyが既知のとき式(17)により計算可能である。

式(24)および式(25)を用い、軸方向応力の総和と軸力との釣り合い式は、次式の通り書くことができる。

$$P_S + P_C - N = 0 \quad (26)$$

降伏時の中立軸比 ky を仮定すれば、式(26)の左辺を計算することができるので、繰り返し計算により、式(26)の左辺の符号が反転するときの ky を求めれば、降伏時の中立軸比が算出できる。

降伏曲率 ϕ y は、次式で得られる。

$$\varphi_y = \frac{\varepsilon_y}{d_n - x_y} \tag{27}$$

ここに、xy=ky･dn

dn：圧縮縁から最外引張鉄筋までの距離

(3) 降伏曲げモーメント My の算出

降伏曲げモーメント My を求めるために、中立軸周りのモーメントの釣り合いを考慮する。

中立軸周りの断面力によるモーメント（外力モーメント）と中立軸周りの鉄筋およびコンクリートによるモーメント（内力モーメント）を等値することで、次式を得る。

$$M_y - N(y_c - x_y) = M_S + M_c$$

すなわち、

$$M_y = M_S + M_c + N(y_c - x_y) \tag{28}$$

ここに、My：降伏曲げモーメント（下面側引張正、左周り正）

Ms：鉄筋力による中立軸周りのモーメント（左周り正）

Mc：コンクリート圧縮力による中立軸周りのモーメント（左周り正）

N：軸力（圧縮正）

yc：圧縮縁から軸力作用位置までの距離（=h/2）

xy：降伏時の中立軸位置（圧縮縁からの距離）

式(28)における Ms は、次式の通りである。

$$M_S = \sum_{i=1}^{i1y} A_{Si} f_y (x_y - d_i) + A_{Sn} f_y (d_n - x_y) + \sum_{i=i1y+1}^{n-1} E_S A_{Si} \frac{k_y - \gamma_i}{1 - k_y} \varepsilon_y (x_y - d_i) \tag{29}$$

ここに、i1y：式(21)

Asi：第 i 段鉄筋の鉄筋量

fy：鉄筋降伏強度

xy：降伏時の中立軸位置（=ky･dn、dn：最外引張鉄筋の圧縮縁からの距離）

di：第 i 段鉄筋のかぶり（圧縮縁からの距離）

Es：鉄筋ヤング係数

ky：降伏時の中立軸比

γ i：dn に対する第 i 段鉄筋のかぶりの比（=di/dn）

ε y：鉄筋降伏ひずみ（=fy/Es）

また、式(28)における Mc は、参考資料の式(参 47)を参照し、応力ひずみ関係のべき乗定数 n、ピーク時ひずみ ε cc に対する圧縮縁ひずみ ε c の比 r（= ε c/ ε cc）、コンクリートヤング係数 Ec、ピーク時ひずみ ε cc、断面幅 b、圧縮縁から中立軸位置までの距離 xy、および下降勾配 Edes により表すことができる。

$$M_c = \begin{cases} \frac{n(n+2)r-3r^n}{3n(n+2)} E_c \varepsilon_{cc} b x_y^2 \quad (r \le 1) \\ \left[\frac{(n+3)(n-1)}{3n(n+2)} + \frac{r-1}{6} \left\{ \frac{3(n-1)}{n}(r+1) - \frac{E_{des}}{E_c}(r-1)(2r+1) \right\} \right] \frac{1}{r^2} E_c \varepsilon_{cc} b x_y^2 \quad (r > 1) \end{cases} \tag{30}$$

ここに、n：応力ひずみ関係のべき乗定数（参考資料の式(参 2)による）

r：ピーク時ひずみ ε cc に対する圧縮縁ひずみ ε c の比（= ε c/ ε cc）

ε c：圧縮縁ひずみ（式(17)による）

ε cc：ピーク時ひずみ（参考資料の式(参 4)による）

Ec：コンクリートヤング係数

Edes：応力ひずみ関係の下降勾配（参考資料の式(参 5)による）

b：断面幅

xy：降伏時の中立軸位置（圧縮縁からの距離、=ky･dn）

dn：圧縮縁から最外引張鉄筋までの距離

降伏時の中立軸位置 xy が既知のとき、式(28)～(30)により、降伏曲げモーメントを求めることができる。

2.3 引張限界時の Mφ

2.3.1 引張限界時の Mφ 算出手順の概要

引張限界時 Mφ 算出手順の概要は、以下の通りである。

(1) 断面諸元、すなわち、断面高さ h、断面幅 b、コンクリートおよび鉄筋のヤング係数 Ec,Es、コンクリート強度 fc、鉄筋降伏強度 fy、鉄筋の被り di、鉄筋量 Asi および作用軸力 N（圧縮正）を設定する。

(2) 拘束効果を考慮する横拘束筋に関する諸元や引張鉄筋の限界引張ひずみを決定するための諸元を設定する。すなわち、横拘束筋呼び径（断面積および断面 2 次モーメント）、横拘束筋の有効長、横拘束筋ピッチ、横拘束筋降伏強度、軸方向筋呼び径（直径）、塑性ヒンジ長（Lp）算出時圧縮側軸方向筋本数、Lp 算出時の横拘束筋有効長、および Lp 算出時の被りを設定する。

(3) 引張限界時（最外引張鉄筋において鉄筋の限界引張ひずみ ε st2, ε st3 に達した時点）における中立軸比 kut を仮定する。kut は、圧縮縁から最外引張鉄筋までの距離 dn に対する中立軸位置 xut（圧縮縁からの距離）の比 kut=xut/dn で定義する。中立軸は有効断面内に存在することを前提に、kuts～kute までを探索する。ここに、kuts=gam(1)+0.0001、kute=0.9999 である。仮定する kut は、kuts から kute までを 100 等分したそれぞれの値とする、したがって、101 個の仮定した kut に対して、以下の探索を行う。

(4) 最外引張鉄筋において限界引張ひずみとなること、および仮定した kut の値から引張限界時の直ひずみ分布を設定する。

(5) (4)による直ひずみ分布と鉄筋降伏ひずみ ε y（=fy/Es）から、圧縮降伏、未降伏および引張降伏した鉄筋の判別を行う。本マクロではパラメータ i1 および i2 を定義し、第 1 段から i1 段までを圧縮降伏した鉄筋、第 i2 段から n 段（n：全鉄筋段数）を引張降伏した鉄筋、それ以外の i1+1 段から i2-1 段までを未降伏の鉄筋と判定する。

(6) (5)による鉄筋の降伏判定をもとに、鉄筋による引張あるいは圧縮応力を求める。すなわち、降伏している場合には鉄筋降伏強度 fy とし、未降伏の場合には直ひずみに鉄筋ヤング係数を乗じた応力とする。さらに、鉄筋応力の鉄筋断面積を乗じて、それぞれの段の鉄筋力を求め、全ての段の鉄筋力の合計値 Ps（Ps：圧縮正）を求める。

(7) コンクリート引張応力は無視することを前提に、(4)の圧縮ひずみ分布から引張限界時のコンクリート圧縮合力 Pc（Pc：圧縮正）を求める。降伏時の Pc は、コンクリートヤング係数 Ec、コンクリート応力ピーク時ひずみ εcc、断面幅 b、最外圧縮鉄筋位置から中立軸位置までの距離（$xut-d_1$）、コンクリート応力ひずみ関係におけるべき乗定数 n、コンクリート応力ひずみ関係の下降勾配 Edes および r で表すことができる。ここに、r はピーク時ひずみ εcc に対する最外圧縮鉄筋位置のひずみ εc1 の比（r= εc1/ εcc）である。（Pc の算出式については後述）

(8) (6)と(7)の計算結果および軸方向応力と軸力 N の釣り合い条件を考慮し、軸応力総和 Ps+Pc-N を、(3)の 101 個の kut に対して計算する。その中で軸応力総和の符号が反転するときの 2 点の kut を kut1 と kut2 とし、また軸応力総和を SUT1 と SUT2 とする。

(9) (8)の計算により、kut1 と kut2 の間に中立軸位置の解があると判断し、(10)の収束計算に移行する。

(10) 以後、より正確な中立軸位置を求めるために、2 分法による収束計算を適用する。kut3=(kut1+kut2)/2 に対する軸応力総和 SUT3 を求める。SUT1 と SUT3 の符号が反転したとき、kut2 を kut3 に置き換える。SUT1 と SUT3 の符号が反転しないとき、kut1 を kut3 に、SUT1 を SUT3 に置き換える。同様の計算を繰り返し、ABS((kut3-kut1)/kut3)< ε （ε：収束誤差）のとき、収束計算を終了し、kut3 を引張限界時の kut とする。

(11) 中立軸位置 xut を xut=kut･dn（dn：圧縮縁から最外引張鉄筋までの距離）により算出する。また、引張限界時の曲率 φut を φut= εst1/(dn-xut)および φut= εst2/(dn-xut)により求める。

(12) 鉄筋力に中立軸位置からの距離 xut-di（di：圧縮縁から第 i 段鉄筋までの距離）を乗じて鉄筋力によるモーメントを求め、全ての段のモーメントを合計することで中立軸周りのモーメント Ms（左周りを正）を計算する。

(13) コンクリート圧縮合力による中立軸周りのモーメント Mc（左周りを正）を求める。引張限界時の Mc は、降伏時のコンクリートヤング係数 Ec、コンクリート応力ピーク時ひずみ εcc、断面幅 b、最外圧縮鉄筋から中立軸位置までの距離($xut-d_1$)、コンクリート応力ひずみ関係におけるべき乗定数 n、コンクリート応力ひずみ関係の下降勾配 Edes および r で表すことができる。ここに、r はピーク時ひずみ εcc に対する最外圧縮鉄筋位置のひずみ εc1 の比（r= εc1/ εcc）である。（Mc の算出式については後述）

(14) 中立軸周りのモーメントの釣り合いから、降伏曲げモーメント My が、My=Ms+Mc+N(yc-xy)により算出できる。ここに、yc は圧縮縁から軸力作用位置までの距離であり、本マクロでは yc=h/2（断面中心）とした。

2.3.2 引張限界時 Mφの算出式

(1)鉄筋の降伏判定

図 2-3 に、引張限界時の断面仮定を示す。

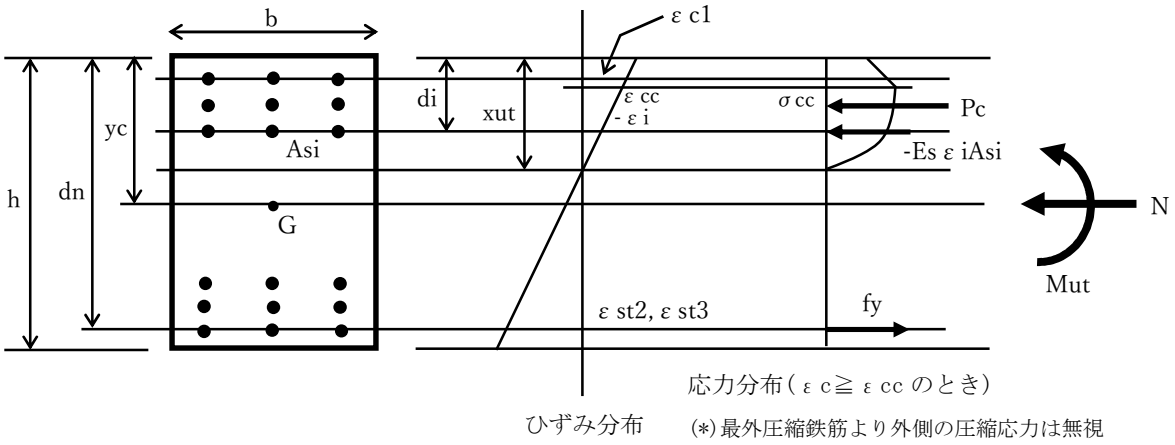


図 2-3　引張限界時の断面仮定

【記号】

h：断面高さ

b：断面幅

dn：圧縮縁から最外引張鉄筋までの距離

yc：圧縮縁から軸力作用位置までの距離（=h/2）

di：第 i 段鉄筋の被り（圧縮縁からの距離）

Asi：第 i 段鉄筋の鉄筋量

xut：引張限界時の中立軸位置（圧縮縁からの距離）

kut：引張限界時の中立軸比（=xut/dn）

εc1：最外圧縮鉄筋位置におけるひずみ（正値）

εcc：最大圧縮応力に達したときのひずみ（正値）

σcc：最大圧縮応力（正値）

εi：第 i 段鉄筋のひずみ（引張正）

εst2：限界状態 2 における鉄筋の限界引張ひずみ

εst3：限界状態 3 における鉄筋の限界引張ひずみ

fy：鉄筋降伏強度

Ec：コンクリートヤング係数

Es：鉄筋ヤング係数

Pc：コンクリート圧縮応力の合力値

N：軸力（圧縮正）

Mut：引張限界時の曲げモーメント（下面側引張正）

図 2-3 のひずみ分布を参照し、第 i 段鉄筋のひずみ εi（引張正）および最外圧縮鉄筋位置におけるひずみ εc1（正値）が次式で表される。

$$\frac{-\varepsilon_i}{x_{ut}-d_i}=\frac{\varepsilon_{ut}}{d_n-x_{ut}}$$

$$\frac{\varepsilon_{c1}}{x_{ut}-d_1}=\frac{\varepsilon_{ut}}{d_n-x_{ut}}$$

すなわち、

$$\varepsilon_i=\frac{d_i-x_{ut}}{d_n-x_{ut}}\varepsilon_{ut} \tag{31}$$

$$\varepsilon_{c1}=\frac{x_{ut}-d_1}{d_n-x_{ut}}\varepsilon_{ut}=\frac{k_{ut}-\gamma_1}{1-k_{ut}}\varepsilon_{ut} \tag{32}$$

ここに、kut：引張限界時の中立軸比（=xut/dn）

εut：限界引張ひずみ（εst2 と εst3 のいずれかで参考資料の式(参 12)と(参 13)による）

γ1：d1/dn（d1：最外圧縮鉄筋のかぶり）

以下では、式(31)を用い、引張限界時における鉄筋が未降伏か降伏するときの条件を求める。

鉄筋が未降伏のとき、鉄筋降伏ひずみを εy(=fy/Es)とすれば、次式が成立する。

$$-\varepsilon_y<\varepsilon_i<\varepsilon_y \tag{33}$$

式(33)に式(31)を代入すれば、次式を得る。

$$-\varepsilon_y<\frac{d_i-x_{ut}}{d_n-x_{ut}}\varepsilon_{ut}<\varepsilon_y \tag{34}$$

ここで、$k_{ut}=\frac{x_{ut}}{d_n}$　$\gamma_i=\frac{d_i}{d_n}$　$\delta=\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_{ut}}$ を定義し、γi の条件で書けば次式が得られる。

$$k_{ut}(1+\delta)-\delta<\gamma_i<k_{ut}(1-\delta)+\delta \tag{35}$$

式(35)が未降伏の条件となり、中立軸比 kut が既知のとき、式(35)により未降伏あるいは降伏するときの鉄筋段数を定めることができる。

ここで、第 1 段から i1 段までが圧縮降伏、i1+1 段から i2-1 段までが未降伏、i2 段から n 段（n：全鉄筋段数）までが引張降伏とするパラメータ i1 および i2 を定義する。式(35)を考慮すれば、i1 および i2 は以下の通り求めることができる。

$i1：\gamma_i<k_{ut}(1+\delta)-\delta$　を満足する最大の i (36)

$i2：\gamma_i>k_{ut}(1-\delta)+\delta$　を満足する最小の i (37)

ここに、kut：引張限界時の中立軸比（=xut/dn）

γi：最外引張鉄筋の圧縮縁からの距離に対する第 i 段鉄筋の圧縮縁からの距離（=di/dn）

δ：鉄筋の限界引張ひずみに対する降伏ひずみの比（=εy/εut）

εut：限界引張ひずみ（εst2 と εst3 のいずれかで参考資料の式(参 12)と(参 13)による）

(2) 中立軸比 kut の算出

中立軸比 kut を定めるために、軸方向応力と軸力の釣り合い式を考慮する。

鉄筋力の合計値 Ps（圧縮正）は、次式で書くことができる。

$$P_S = \sum_i(-E_S\varepsilon_i A_{si}) = \sum_i E_S A_{si}\frac{x_{ut}-d_i}{d_n-x_{ut}}\varepsilon_{ut} = \sum_i E_S A_{Si}\frac{k_{ut}-\gamma_i}{1-k_{ut}}\varepsilon_{ut} \quad (38)$$

式(23)は、鉄筋が未降伏のときの鉄筋力合計値であるが、未降伏および降伏の鉄筋が混在する場合には、以下の式となる。すなわち、鉄筋ひずみがεyを超えたときは、鉄筋応力を降伏応力fyとすれば、次式を得る。

$$P_S = \sum_{i=1}^{i1} A_{Si}f_y - \sum_{i=i2}^{n} A_{Si}f_y + \sum_{i=i1+1}^{i2-1} E_S A_{Si}\frac{k_{ut}-\gamma_i}{1-k_{ut}}\varepsilon_{ut} \quad (39)$$

ここに、i1,i2：式(36)および(37)

Asi：第i段鉄筋の鉄筋量

fy：鉄筋降伏応力

Es：鉄筋ヤング係数

kut：引張限界時の中立軸比

（=xut/dn、xut：引張限界時の中立軸位置、dn：圧縮縁から最外引張鉄筋までの距離）

γi：最外引張鉄筋の圧縮縁からの距離に対する第i段鉄筋の圧縮縁からの距離の比（=di/dn）

εut：限界引張ひずみ（εst2とεst3のいずれかで参考資料の式(参12)と(参13)による）

コンクリート圧縮応力の合力値Pc（圧縮正）は、参考資料の式(参46)を参照し、応力ひずみ関係のべき乗定数n、ピーク時ひずみεccに対する最外圧縮鉄筋位置のひずみεc1の比r（=εc1/εcc）、コンクリートヤング係数 Ec、ピーク時ひずみεcc、断面幅 b、最外圧縮鉄筋から中立軸位置までの距離(xut-d_1)、および下降勾配 Edes により表すことができる。

$$P_c = \begin{cases} \dfrac{n(n+1)r-2r^n}{2n(n+1)}E_c\varepsilon_{cc}b(x_{ut}-d_1) & (r \le 1) \\ \left[\dfrac{(n+2)(n-1)}{2n(n+1)} + \dfrac{r-1}{2}\left\{\dfrac{2(n-1)}{n} - \dfrac{E_{des}}{E_c}(r-1)\right\}\right]\dfrac{1}{r}E_c\varepsilon_{cc}b(x_{ut}-d_1) & (r > 1) \end{cases} \quad (40)$$

ここに、n：応力ひずみ関係のべき乗定数（参考資料の式(参2)による）

r：ピーク時ひずみεccに対する最外圧縮鉄筋位置のひずみεc1の比（=εc1/εcc）

εcc：ピーク時ひずみ（参考資料の式(参4)による）

εc1：最外圧縮鉄筋位置のひずみ（式(32)による）

Ec：コンクリートヤング係数

Edes：応力ひずみ関係の下降勾配（参考資料の式(参5)による）

b：断面幅

xut：引張限界時の中立軸位置（圧縮縁からの距離、=kut･dn）

dn：圧縮縁から最外引張鉄筋までの距離

d_1：最外圧縮鉄筋のかぶり（圧縮縁からの距離）

式(40)における r の算出には、圧縮縁ひずみεcが必要になるが、kyが既知のとき式(32)により計算可能である。

式(39)および式(40)を用い、軸方向応力の総和と軸力との釣り合い式は、次式の通り書くことができる。

$$P_S + P_C - N = 0 \quad (41)$$

引張限界時の中立軸比 kut を仮定すれば、式(41)の左辺を計算することができるので、繰り返し計算

により、式(41)の左辺の符号が反転するときの kut を求めれば、引張限界時の中立軸比が算出できる。

引張限界時の曲率 ϕ ut は、次式で得られる。

$$\varphi_{ut} = \frac{\varepsilon_{ut}}{d_n - x_{ut}} \tag{42}$$

ここに、xut=kut･dn

dn：圧縮縁から最外引張鉄筋までの距離

ε ut：限界引張ひずみ（ε st2 と ε st3 のいずれかで参考資料の式(参 12)と(参 13)による）

引張限界時の中立軸比 kut は、その値が大きくなると、最外圧縮鉄筋位置のひずみ ε c1 が限界圧縮ひずみ ε ccl を超過する場合がある。これは引張限界よりも圧縮限界が先に生じることを意味するので、kut の探索において ε c1 が ε ccl を超えないように kut を制限する必要がある。

本マクロでは、ε c1= ε ccl となる kut を求めておき、探索された kut をチェックすることとした。

式(32)より、ε c1< ε ccl となる条件を求めると、以下の通りである。

$$k_{ut} < \frac{1+\gamma_1 \frac{\varepsilon_{ut}}{\varepsilon_{ccl}}}{1+\frac{\varepsilon_{ut}}{\varepsilon_{ccl}}} \tag{43}$$

ここに、ε ut：限界引張ひずみ（ε st2 と ε st3 のいずれかで参考資料の式(参 12)と(参 13)による）

ε ccl：限界圧縮ひずみ（参考資料の式(参 11)による）

γ_1:最外引張鉄筋の圧縮縁からの距離に対する最外圧縮鉄筋の圧縮縁からの距離の比(=d_1/dn)

d_1：最外圧縮鉄筋のかぶり

dn：圧縮縁から最外引張鉄筋までの距離

(3) 引張限界時の曲げモーメント Mut の算出

引張限界時の曲げモーメント Mut を求めるために、中立軸周りのモーメントの釣り合いを考慮する。

中立軸周りの断面力によるモーメント（外力モーメント）と中立軸周りの鉄筋およびコンクリートによるモーメント（内力モーメント）を等値することで、次式を得る。

$$M_{ut} - N(y_c - x_{ut}) = M_S + M_c$$

すなわち、

$$M_{ut} = M_S + M_c + N(y_c - x_{ut}) \tag{44}$$

ここに、Mut：引張限界時の曲げモーメント（下面側引張正、左周り正）

Ms：鉄筋力による中立軸周りのモーメント（左周り正）

Mc：コンクリート圧縮力による中立軸周りのモーメント（左周り正）

N：軸力（圧縮正）

yc：圧縮縁から軸力作用位置までの距離（=h/2）

xut：引張限界時の中立軸位置（圧縮縁からの距離）

式(44)における Ms は、次式の通りである。

$$M_S = \sum_{i=1}^{i1} A_{Si} f_y (x_{ut} - d_i) + \sum_{i=i2}^{n} A_{Si} f_y (d_i - x_{ut}) + \sum_{i=i1+1}^{i2-1} E_S A_{Si} \frac{k_{ut} - \gamma_i}{1 - k_{ut}} \varepsilon_{ut} (x_{ut} - d_i) \tag{45}$$

ここに、i1,i2：式(36)および(37)

Asi：第 i 段鉄筋の鉄筋量

fy：鉄筋降伏強度

xut：引張限界時の中立軸位置（=kut･dn、dn：最外引張鉄筋の圧縮縁からの距離）

di：第 i 段鉄筋のかぶり（圧縮縁からの距離）

Es：鉄筋ヤング係数

kut：引張限界時の中立軸比

γi：dn に対する第 i 段鉄筋のかぶりの比（=di/dn）

εut：限界引張ひずみ（εst2 とεst3 のいずれかで参考資料の式(参 12)と(参 13)による）

また、式(44)における Mc は、参考資料の式(参 47)を参照し、応力ひずみ関係のべき乗定数 n、ピーク時ひずみεcc に対する最外圧縮鉄筋位置のひずみεc1 の比 r（=εc1/εcc）、コンクリートヤング係数 Ec、ピーク時ひずみεcc、断面幅 b、最外圧縮鉄筋位置から中立軸位置までの距離(xut-d_1)、および下降勾配 Edes により表すことができる。

$$M_c=\begin{cases}\dfrac{n(n+2)r-3r^n}{3n(n+2)}E_c\varepsilon_{cc}b(x_{ut}-d_1)^2 & (r\le 1)\\ \left[\dfrac{(n+3)(n-1)}{3n(n+2)}+\dfrac{r-1}{6}\left\{\dfrac{3(n-1)}{n}(r+1)-\dfrac{E_{des}}{E_c}(r-1)(2r+1)\right\}\right]\dfrac{1}{r^2}E_c\varepsilon_{cc}b(x_{ut}-d_1)^2 & (r>1)\end{cases} \quad (46)$$

ここに、n：応力ひずみ関係のべき乗定数（参考資料の式(参 2)による）

r：ピーク時ひずみεcc に対する最外圧縮鉄筋位置のひずみεc1 の比（=εc1/εcc）

εcc：ピーク時ひずみ（参考資料の式(参 4)による）

εc1：最外圧縮鉄筋位置のひずみ（式(32)による）

Ec：コンクリートヤング係数

Edes：応力ひずみ関係の下降勾配（参考資料の式(参 5)による）

b：断面幅

xut：引張限界時の中立軸位置（圧縮縁からの距離、=kut･dn）

dn：圧縮縁から最外引張鉄筋までの距離

d_1：最外圧縮鉄筋のかぶり（圧縮縁からの距離）

引張限界時の中立軸位置 xut が既知のとき、式(44)～(46)により、引張限界時の曲げモーメントを求めることができる。

2.4 ひび割れ時の Mφ

ひび割れ曲げモーメントおよびひび割れ曲率は、道路橋示方書・同解説Ⅴ 耐震設計編に提示される方法によって算出した。

ひび割れ曲げモーメント Mc は、次式で表される。

$$M_c=W_c\left(f_t+\frac{N}{A_c}\right) \quad (47)$$

ここに、Wc：鉄筋を考慮した換算断面係数（m3）

ft：コンクリート引張強度（kN/m2）（=0.23$fck^{2/3}$×1000：コンクリート標準示方書による）

fck：コンクリート設計基準強度（N/mm2）

Ac：鉄筋を考慮した換算断面積（m2）

N：軸力（kN）

また、換算断面係数 Wc および換算断面積 Ac は、次式で表される。

$$W_c = \frac{I_c}{h - y_c} \tag{48}$$

$$A_c = bh + \sum nA_{Si} \tag{49}$$

ここに、Ic：鉄筋を考慮した図心周りの断面 2 次モーメント（m4）

$$I_c = \frac{1}{3} b\{y_c^3 + (h - y_c)^3\} + \sum nA_{si}(y_c - d_i)^2 \tag{50}$$

h：断面高さ（m）

b：断面幅（m）

yc：圧縮縁から図心位置までの距離（m）

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}bh^2 + \sum nA_{Si}d_i}{bh + \sum nA_{si}} \tag{51}$$

di：第 i 段鉄筋のかぶり（圧縮縁からの距離）

n：ヤング係数比（n=Es/Ec、Es：鉄筋ヤング係数(kN/m2)）

Asi：第 i 段の鉄筋断面積

ひび割れ曲率 φc は、次式で表される。

$$\varphi_c = \frac{M_c}{E_c I_c} \tag{52}$$

ここに、Ec：コンクリートヤング係数（kN/m2）

3. 入出力データ

3.1 入力データ

入力データは、シート「入力データ 1」および「入力データ 2」に作成を行う。
入力値は、以下の通りである。

3.1.1 シート「入力データ 1」

シート「入力データ 1」には、断面寸法、コンクリートおよび鉄筋の材料定数、軸方向配筋に関するデータを入力する。

(1)通し番号

データの数分の番号を 1 から順に入力する。この通し番号が空欄となった時点でデータが終了したと判断し、計算を中止させる。

(2)断面高さ h(cm)

矩形断面の断面高さを cm 単位で入力する。

(3)断面幅 b(cm)

矩形断面の断面幅を cm 単位で入力する。

(4)コンヤング係数 Ec(kN/mm2)

コンクリートのヤング係数を、kN/mm2 単位で入力する。

(5)鉄筋ヤング係数 Es(kN/mm2)

鉄筋のヤング係数を、kN/mm2 単位で入力する。

(6)コン強度 fc(N/mm2)

コンクリートの圧縮強度を、N/mm2 単位で入力する。

(7)鉄筋降伏強度 fy(N/mm2)

鉄筋の降伏強度を、N/mm2 単位で入力する。

(8)軸力 N(kN)

矩形断面に作用する軸力値を、kN 単位で入力する。圧縮力を正値とする。

(9)鉄筋段数 nst

鉄筋の全段数を入力する。

(10)被り cv(cm)および鉄筋量 As(cm2)

鉄筋の被りを cm 単位で、鉄筋量を cm2 単位で入力する。鉄筋の被りは、圧縮縁からの距離で入力す

る。鉄筋量は、1 段分の鉄筋量を入力する。本データは、(9)の鉄筋段数分、すなわち nst 個の被りと鉄筋量を入力する必要がある。

表 3-1 に、シート「入力データ 1」の作成例を示す。

表 3-1　シート「入力データ 1」の例（一部）

									第1段		第2段		第3段		第4段		第5段	
通し番号	断面高さ h(cm)	断面幅 b(cm)	コンヤング係数 ec(kN/mm2)	鉄筋ヤング係数 es(kN/mm2)	コン強度 fc(N/mm2)	鉄筋降伏強度 fy(N/mm2)	軸力 N(kN)	鉄筋段数 nst	被り cv(cm)	鉄筋量 As(cm2)	被り cv(cm)	鉄筋量 As(cm2)	被り cv(cm)	鉄筋量 As(cm2)	被り cv(cm)	鉄筋量 As(cm2)	被り cv(cm)	鉄筋量 As(cm2)
1	200	400	28	200	30	345	8000.0	15	15	246.202	25	135.014	37.5	15.884	50	31.768	62.5	15.884
2	400	200	28	200	30	345	8000.0	31	15	102.432	25	63.888	37.5	15.884	50	31.768	62.5	15.884
3	200	400	28	200	30	345	8000.0	15	15	246.202	25	135.014	37.5	23.11122	50	23.11122	62.5	23.11122
4	400	200	28	200	30	345	8000.0	31	15	102.4628	25	63.9188	37.5	23.50832	50	23.50832	62.5	23.50832
												鉄筋被りは圧縮縁からの距離である						

3.1.2 シート「入力データ 2」

シート「入力データ 2」には、横拘束筋に関するデータおよび塑性ヒンジ長算出に関するデータを入力する。

(1)通し番号

データの数分の番号を 1 から順に入力する。この通し番号を含め、シート「入力データ 2」のデータは、「入力データ 1」と同一の順序でデータを整合させる必要がある。

(2)横拘束筋呼び径 dias

横拘束筋の呼び径を入力する。例えば、「D19」と入力する。本データにより、横拘束筋の断面積および鉄筋径が算出される。

(3) ρ s 算出の横拘束筋有効長 dd(cm)

コンクリートの横拘束効果を考慮するために算出される横拘束筋の体積比 ρ s を求めるときの横拘束筋の有効長を cm 単位で入力する。中間帯鉄筋により分割されるコンクリート部分の幅であり、ρs が最も小さくなる箇所で評価する。

(4)横拘束筋ピッチ ss(cm)

横拘束鉄筋の間隔（部材軸方向）を cm 単位で入力する。

(5)横拘束筋降伏強度 fys(N/mm2)

横拘束鉄筋の降伏強度を、N/mm2 単位で入力する。本データは、最大圧縮応力度 σ cc、最大圧縮応力度に達するときのひずみ ε cc および下降勾配の算出に使用される。

(6)断面形状

固定値であり、「矩形」を入力する。

(7)軸方向筋呼び径 diaa

軸方向筋の呼び径を入力する。例えば、「D32」と入力する。塑性ヒンジ長や鉄筋の限界引張ひずみの

算出時に、本データが使用される。

(8)Lp 算出の圧縮側軸方向筋本数 ns

塑性ヒンジ長を算出するための横拘束鉄筋の有効長 d’（(8)のデータ）が最も大きいコンクリート部分に配置される圧縮側軸方向鉄筋の本数で、複数段配筋される場合においてはそれらの合計本数とする。（d’が同じ場合は最も多い本数を ns として用いる。側方鉄筋は考慮しない。）

(9)Lp 算出の横拘束筋有効長 ddd(cm)

塑性ヒンジ長を算出するための横拘束鉄筋の有効長で、耐震設計で考慮する慣性力の作用方向と平行な方向に配置する横拘束鉄筋によって分割されたコンクリート部分の中で最も大きい値とする。本データは cm 単位で入力する。

(10)Lp 算出のかぶり c0(cm)

塑性ヒンジ長を算出するための横拘束鉄筋の有効長 d’（(8)のデータ）が最も大きいコンクリート部分の最外縁に配置された軸方向鉄筋の最外面からコンクリート表面までの距離。本データは cm 単位で入力する。

(11)橋脚高さ hp(m)

橋脚基部から上部構造の慣性力の作用位置までの距離。本データは m 単位で入力する。本データにより塑性ヒンジ長 Lp が Lp≦0.15hp に制限される。

(12)横拘束筋の条件パラメータ isw

isw=1：最大圧縮応力 σ cc 以降の下降勾配を考慮しない。圧縮限界 ε ccl を ε cc とする（ε ccl= ε cc）。
横拘束筋による最大圧縮応力の増加は考慮する。

isw=2：横拘束筋の効果を考慮しない（ρ s=0 とする）。下降勾配および横拘束筋による最大圧縮応力の増加の両方とも考慮しない（σ cc= σ ck, ε ccl= ε cc=0.002）。

isw が上記以外：下降勾配を考慮する

表 3-2 に、シート「入力データ 2」の作成例を示す。

表 3-2　シート「入力データ 2」の例

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	通し番号	横拘束筋呼び径 dias	ρs算出の横拘束筋有効長 dd(cm)	横拘束筋ピッチ ss(cm)	横拘束筋降伏強度 fys (N/mm2)	断面形状	軸方向筋呼び径 diaa	Lp算出の圧縮側軸方向筋本数 ns	Lp算出の横拘束筋有効長ddd (cm)	Lp算出のかぶり c0(cm)	橋脚高さ hp (m)	横拘束筋の条件パラメータ isw	備考
	1	D19	87.5	15	345	矩形	D32	12	87.5	13.4	10	0	矩形断面橋軸方向
	2	D19	75	15	345	矩形	D29	11	75	13.55	10	0	矩形断面橋軸直角方向
	3	D19	87.5	15	345	矩形	D32	12	87.5	13.4	10	0	矩形断面橋軸方向
	4	D19	75	15	345	矩形	D29	11	75	13.55	10	0	矩形断面橋軸直角方向
									横拘束筋の条件パラメータisw 1: εcc以降の下降勾配を考慮せず、圧縮限界をεccとする （εccl=εcc、εccl：限界圧縮ひずみ、εcc：応力ピーク時ひずみ） 2: 横拘束筋を考慮しない(εccl=εcc=0.002、ρs=0) 1,2以外：εcc以降の下降勾配を考慮する			

なお、シート「入力データ 2」の O 列から AA 列までは出力データであり、マクロを RUN するごとに消去して書き換えられる。また、備考欄のデータはマクロのデータとして使用しない。

3.2 出力データ

3.2.1 シート「限界値(道示Ⅴ)」

マクロ内のフラグ「imeth」を 1 以外に設定したとき、コンクリート応力ひずみ関係に道示Ⅴを用い、ケースごとにひび割れ時、降伏時、引張限界 2（限界状態 2)、引張限界 3（限界状態 3）および圧縮限界の中立軸位置、曲率および曲げモーメントを出力する。正側および負側の両方の値を出力する。

なお、本シートには引張限界時において圧縮限界に達していないことをチェックするため、式(43)により、引張限界時の中立軸位置の制限値 xut_lim を出力している。

表 3-2(a)に、シート「限界値(道示Ⅴ)」の出力例を示す。

表 3-3(b)に、xut_lim の出力例を示す。

表 3-2(a)　シート「限界値(道示Ⅴ)」の例（正側のみ表示）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
	ケース	ひび割れ xc(+) (cm)	ひび割れ φc(+) (1/m)	ひび割れ Mc(+) (kNm)	降伏 xy(+) (cm)	降伏 φy(+) (1/m)	降伏 My(+) (kNm)	引張限界 xut2(+) (cm)	引張限界 φut2(+) (1/m)	引張限界 Mut2(+) (kNm)	引張限界 xut3(+) (cm)	引張限界 φut3(+) (1/m)	引張限界 Mut3(+) (kNm)	圧縮限界 xu(+) (cm)	圧縮限界 φu(+) (1/m)	圧縮限界 Mu(+) (kNm)
	1	129.221	0.000112	9587.5	58.173	0.00136	30413.5	32.357	0.023117	34485.6	31.806	0.032248	34452.9	32.818	0.045741	34205.6
	2	258.607	5.61E-05	18636.7	116.746	0.000643	50847.0	65.346	0.012249	68901.9	68.148	0.0173	67796.4	68.214	0.017367	67774.3
	3	129.221	0.000112	9593.1	58.173	0.00136	30481.9	32.320	0.023112	34480.2	31.809	0.032248	34454.8	32.821	0.045732	34207.4
	4	258.609	5.61E-05	18653.6	116.734	0.000643	51031.0	65.015	0.012236	68960.1	67.509	0.017265	67920.0	67.745	0.017521	67840.6

表 3-2(b)　xut_lim の出力例

34	35	36	37	38	39	40	41
xut2_lim(+) (cm)	xut3_lim(+) (cm)	判定 xut2(+)	判定 xut3(+)	xut2_lim(−) (cm)	xut3_lim(−) (cm)	判定 xut2(−)	判定 xut3(−)
46.897	39.074	OK	OK	46.897	39.074	OK	OK
85.656	68.381	OK	OK	85.656	68.381	OK	OK
46.897	39.074	OK	OK	46.897	39.074	OK	OK
85.656	68.381	OK	OK	85.656	68.381	OK	OK

3.2.2 シート「Mφ図化(道示Ⅴ)」

Mφ限界値の出力を、図化しやすいように、順序を変更して出力する。

限界値の記号の意味は、以下の通りである。

u(-)：負側圧縮限界

ut3(-)：負側引張限界 3

ut2(-)：負側引張限界 2

y(-)：負側降伏時

c(-)：負側ひび割れ時

c(+)：正側ひび割れ時

y(+)：正側降伏時

ut2(+)：正側引張限界 2

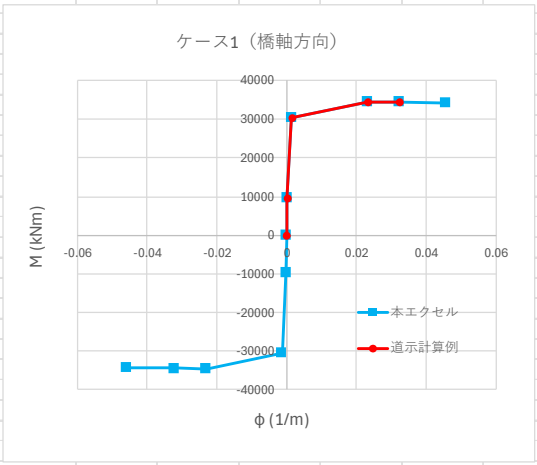
ut3(+)：正側引張限界 3

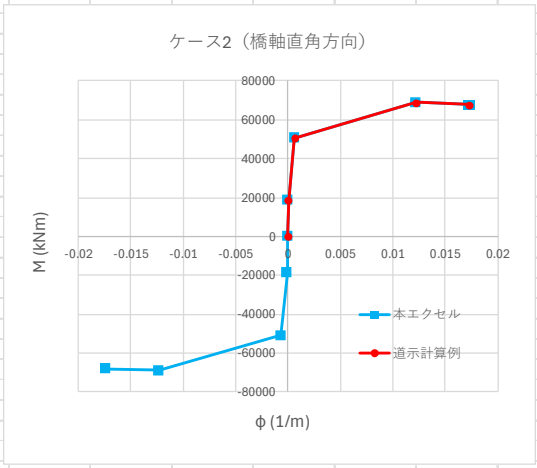
u(+)：正側圧縮限界

表 3-3 に、シート「Mφ図化(道示V)」の出力例を示す。

表 3-3　シート「Mφ図化(道示V)」の例

1	φ(1/m)	M(kNm)	2	φ(1/m)	M(kNm)	3	φ(1/m)	M(kNm)	4	φ(1/m)	M(kNm)
u(−)	−0.04574	−34205.6	u(−)	−0.01737	−67774.3	u(−)	−0.04573	−34207.4	u(−)	−0.01752	−67840.6
ut3(−)	−0.03225	−34452.9	ut3(−)	−0.0173	−67796.4	ut3(−)	−0.03225	−34454.8	ut3(−)	−0.01727	−67920
ut2(−)	−0.02312	−34485.6	ut2(−)	−0.01225	−68901.9	ut2(−)	−0.02311	−34480.2	ut2(−)	−0.01224	−68960.1
y(−)	−0.00136	−30413.5	y(−)	−0.00064	−50847	y(−)	−0.00136	−30481.9	y(−)	−0.00064	−51031
c(−)	−0.00011	−9587.52	c(−)	−5.6E−05	−18636.7	c(−)	−0.00011	−9593.09	c(−)	−5.6E−05	−18653.6
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c(+)	0.000112	9587.517	c(+)	5.61E−05	18636.66	c(+)	0.000112	9593.088	c(+)	5.61E−05	18653.56
y(+)	0.00136	30413.54	y(+)	0.000643	50846.95	y(+)	0.00136	30481.92	y(+)	0.000643	51030.97
ut2(+)	0.023117	34485.57	ut2(+)	0.012249	68901.86	ut2(+)	0.023112	34480.24	ut2(+)	0.012236	68960.07
ut3(+)	0.032248	34452.94	ut3(+)	0.0173	67796.38	ut3(+)	0.032248	34454.81	ut3(+)	0.017265	67920.04
u(+)	0.045741	34205.6	u(+)	0.017367	67774.35	u(+)	0.045732	34207.44	u(+)	0.017521	67840.64





3.2.3 シート「収束状況(U+)」、「収束状況(UT2+)」、「収束状況(UT3+)」、「収束状況(Y+)」「収束状況(U−)」、「収束状況(UT2−)」、「収束状況(UT3−)」、および「収束状況(Y−)」

本マクロでは、中立軸計算において 2 分法による繰り返し計算を適用している。その収束状況を把握するために、収束回数と収束に至るまでの中立軸の値を出力している。

収束計算の繰り返し最大数を 100 としているので、収束回数が 100 を超えた場合には、計算が収束していない可能性がある。収束誤差が 10^{-5} の場合、20 回程度の繰り返しで収束するようである。

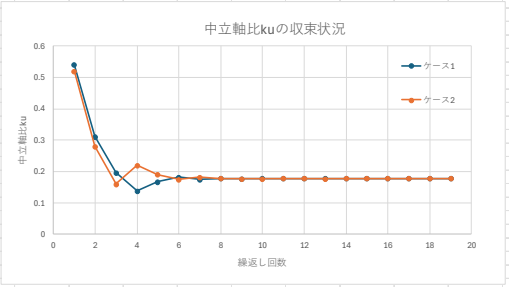
また、鉄筋の降伏範囲を示すパラメータ i1 と i2 あるいは i1y も出力している。

収束状況を出力するシートは、限界値 4 種（圧縮限界、引張限界 2、引張限界 3 および降伏）と正負 2 種の組み合わせで、全部で 8 つある。

表 3-4 に、シート「収束状況(U+)」の出力例を示す。

表 3-4　シート「収束状況(U+)」の例

ケース	収束回数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	19	0.540541	0.31086	0.19602	0.138601	0.167311	0.1817	0.174488	0.178077	0.176283	0.17718	0.177629	0.177404	0.177292	0.177348	0.177376	0.17739	0.177397	0.177394	0.177396	
	i1	6	3	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2		
	i2	10	6	4	3	3	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3		
2	20	0.519481	0.27927	0.15917	0.219218	0.189192	0.1742	0.181686	0.177932	0.176056	0.176994	0.177463	0.177229	0.177111	0.17717	0.177199	0.177185	0.177177	0.177181	0.177179	0.17718
	i1	13	7	4	5	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	
	i2	19	10	6	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	
3	19	0.540541	0.31086	0.19602	0.138601	0.167311	0.1817	0.174488	0.178077	0.176283	0.17718	0.177629	0.177404	0.177516	0.17746	0.177432	0.177418	0.177411	0.177415	0.177413	
	i1	6	3	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2		
	i2	10	6	4	3	3	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3		
4	20	0.519481	0.27927	0.15917	0.219218	0.189192	0.174179	0.181686	0.177932	0.176056	0.175117	0.175586	0.175821	0.175938	0.175997	0.175968	0.175953	0.17596	0.175964	0.175962	0.175961
	i1	13	7	4	5	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	
	i2	19	10	6	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	



i1：鉄筋1段からi1段まで圧縮降伏
i2：鉄筋i2段からnst段まで引張降伏（nst：全鉄筋段数）

3.2.4 シート「軸応力総和(U+)」、「軸応力総和(UT2+)」、「軸応力総和(UT3+)」、「軸応力総和(Y+)」、「軸応力総和(U-)」、「軸応力総和(UT2-)」、「軸応力総和(UT3-)」、および「軸応力総和(Y-)」

本マクロでは、中立軸位置が有効断面内（圧縮縁から最外引張鉄筋までの間）にあることを前提とし、かつ有効断面内に中立軸位置の解が 1 個存在することを仮定している。

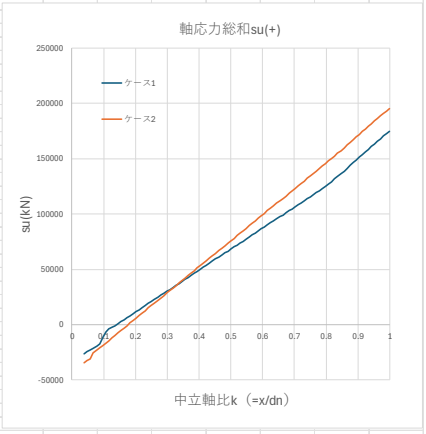
したがって、有効断面内の中立軸位置の解が複数存在する場合には、2 分法による収束計算が破綻する可能性がある。そこで、中立軸比の 0.0001 から 0.9999 までの範囲を 100 分割して、軸応力総和 Ps+Pc-N を出力している。軸応力総和の値が 0 を切る箇所が 1 箇所となることをグラフ上で確認することとしている。解が複数存在する場合には、別途検討が必要である。

軸応力総和を出力するシートは、限界値 4 種（圧縮限界、引張限界 2、引張限界 3 および降伏）と正負 2 種の組み合わせで、全部で 8 つある。

表 3-5 に、シート「軸応力総和(U+)」の出力例を示す。

表 3-5　シート「軸応力総和(U+)」の例（一部）

ケース	1		2		3		4	
	k	su	k	su	k	su	k	su
1	0.039061	-26066.5	0.039061	-34309.8	0.039061	-26069.3	0.039061	-34290
2	0.048669	-24467.1	0.048669	-32542.6	0.048669	-24469.8	0.048669	-32522.8
3	0.058278	-22867.7	0.058278	-30775.4	0.058278	-22870.4	0.058278	-30755.6
4	0.067886	-21268.2	0.067886	-25599.3	0.067886	-21271	0.067886	-25577.8
5	0.077495	-19668.8	0.077495	-22832.7	0.077495	-19671.5	0.077495	-22810.8
6	0.087103	-17244.5	0.087103	-21065.5	0.087103	-17247.2	0.087103	-21043.6
7	0.096711	-11346.1	0.096711	-18785.5	0.096711	-11348.8	0.096711	-18517.4
8	0.10632	-6674	0.10632	-16594.5	0.10632	-6676.74	0.10632	-16122.9
9	0.115928	-3955.12	0.115928	-14635.6	0.115928	-3957.86	0.115928	-14096
10	0.125537	-2355.69	0.125537	-12098.6	0.125537	-2358.43	0.125537	-11759.2
11	0.135145	-756.257	0.135145	-9715.51	0.135145	-758.996	0.135145	-9536.19
12	0.144753	867.4373	0.144753	-7384.25	0.144753	875.7373	0.144753	-7307.19
13	0.154362	2726.039	0.154362	-5062.04	0.154362	2852.262	0.154362	-4918.32
14	0.16397	4544.802	0.16397	-3053.59	0.16397	4770.821	0.16397	-2794.06
15	0.173578	6332.255	0.173578	-909.45	0.173578	6643.825	0.173578	-594.887
16	0.183187	8094.657	0.183187	1489.876	0.183187	8480.38	0.183187	1772.738
17	0.192795	9836.702	0.192795	3776.956	0.192795	10287.31	0.192795	4016.102
18	0.202404	11541.4	0.202404	5995.134	0.202404	12035.8	0.202404	6191.971
19	0.212012	13488.88	0.212012	8261.017	0.212012	13888.43	0.212012	8467.18
20	0.22162	15399.74	0.22162	10474.44	0.22162	15714.43	0.22162	10688.94
21	0.231229	17279.47	0.231229	12852.15	0.231229	17517.78	0.231229	13019.85
22	0.240837	19132.53	0.240837	15077.12	0.240837	19301.72	0.240837	15227.09
23	0.250446	20962.54	0.250446	17260.5	0.250446	21068.9	0.250446	17394.33
24	0.260054	22772.5	0.260054	19528.74	0.260054	22821.5	0.260054	19705.93
25	0.269662	24688.47	0.269662	21784.35	0.269662	24741.07	0.269662	22015.27
26	0.279271	26585.95	0.279271	23913.63	0.279271	26645	0.279271	24152.09
27	0.288879	28460.53	0.288879	26262.16	0.288879	28525.51	0.288879	26437.49
28	0.298488	30180.29	0.298488	28580.07	0.298488	30287.41	0.298488	28693.73
29	0.308096	31875.35	0.308096	30871.63	0.308096	32025.99	0.308096	30934.23
30	0.317704	33563.83	0.317704	33109.58	0.317704	33754.98	0.317704	33208.79
31	0.327313	35429.43	0.327313	35277.88	0.327313	35608.51	0.327313	35421.22
32	0.336921	37303.04	0.336921	37477.98	0.336921	37463.97	0.336921	37647.6
33	0.34653	39159.51	0.34653	39812.85	0.34653	39303.43	0.34653	39965.04
34	0.356138	41000.41	0.356138	42069.56	0.356138	41128.34	0.356138	42184.36
35	0.365746	42827.11	0.365746	44311.65	0.365746	42940	0.365746	44398.07



3.3 マクロ内で設定するフラグ

計算条件の制御のため、マクロ内において設定する以下のフラグがある。

(1)imeth

本マクロでは、コンクリート応力ひずみ関係として、コ示（道示Ⅲ）あるいは道示Ⅴのいずれを使用するか選択が可能である。imeth=1 のとき、コ示の応力ひずみ関係を使用する。それ以外のとき、道示Ⅴの応力ひずみ関係を使用する。現マクロでは、imeth=0（道示Ⅴを選択）としている。

コンクリート応力ひずみ関係としてコ示（道示）を選択した場合、マクロでの計算手順やデータ入力方法は、先の記事「多段配筋矩形断面に対する Mφ 限界値算出のエクセルマクロ」の記載と同様である。この場合、「入力データ 2」への入力は必要ない。

(2)iflag1

iflag1=1 のとき、ワークシート「収束状況(U+)」、「収束状況(Y+)」, 「収束状況(U-)」、「収束状況(Y-)」、「収束状況(UT2+)」、「収束状況(UT2-)」、「収束状況(UT3+)」、「収束状況(UT3-)」に、収束状況を書き出す。現マクロでは、iflag1=1 である。

(3)iflag2

iflag2=0 のとき、軸力作用位置を断面中心とする。それ以外のとき、軸力作用位置を図心とする。現マクロでは、iflag2=0 である。

(4)iflag3

iflag3=1 のとき、ひび割れ時 Mφの計算において鉄筋剛性を考慮しない。それ以外のとき、ひび割れ時 Mφの計算で鉄筋剛性を考慮する。現マクロでは、計算例 1 は iflag3=1、計算例 2 は iflag3=0 としている。

(5)iflag4

iflag4=1 のとき、ワークシート軸応力総和(U+)」、「軸応力総和(Y+)」、「軸応力総和(U-)」、「軸応力総和(Y-)」、「軸応力総和(UT2+)」、「軸応力総和(UT2-)」、「軸応力総和(UT3+)」、「軸応力総和(UT3-)」に、軸応力総和を書き出す。現マクロでは、iflag4=1 である。

(6)iflag5

iflag5=1 のとき、降伏時 Mφの計算においてコンクリートおよび鉄筋の応力ひずみ関係を線形とする。それ以外のとき、降伏時 Mφの計算で応力ひずみ関係を非線形とする。現マクロでは、iflag5=0 である。

(7)eps

中立軸位置を 2 分法による収束計算で求める際の収束誤差 ε である。現マクロでは ε を 10^{-5} に設定している。現時点の中立軸比に対する、現時点の中立軸比と前回の中立軸比の差の比を収束誤差と定義している。

(8)itmax

中立軸位置の収束計算における最大繰り返し回数である。現マクロでは 100 に設定している。

3.4 データ数の制限

マクロ内において配列の大きさを指定しているため、全鉄筋段数およびＭφ計算のケース数に関して以下の制限がある。

・全鉄筋段数：最大 50（配列の大きさを「na1」で指定、現マクロは na1=50）
・Ｍφ計算のケース数：最大 200（配列の大きさを「na2」で指定、現マクロは na2=200）

全鉄筋段数が 50 を超える場合には、マクロ内の変数 na1 の値を大きく設定し直す必要がある。
Ｍφ計算のケース数が 200 を超える場合には、マクロ内の変数 na2 の値を大きく設定し直す必要がある。

4. 計算例

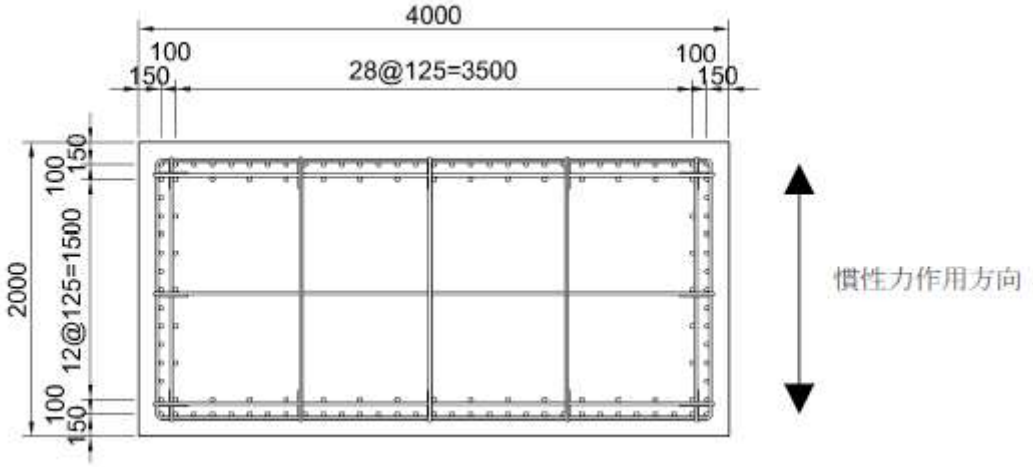
4.1 計算条件

計算例として、「道路橋の耐震設計における鉄筋コンクリート橋脚の水平力－水平変位関係の計算例（H24 版道示対応）（社）日本道路協会（当時）　平成 24 年 5 月」（以下、道示計算例と呼ぶ）における「矩形断面の橋軸方向」および「矩形断面の橋軸直角方向」の断面諸元を使用した。

表 4-1 に、計算条件を示す。また、図 4-1 に、配筋を示す。

表 4-1 計算条件

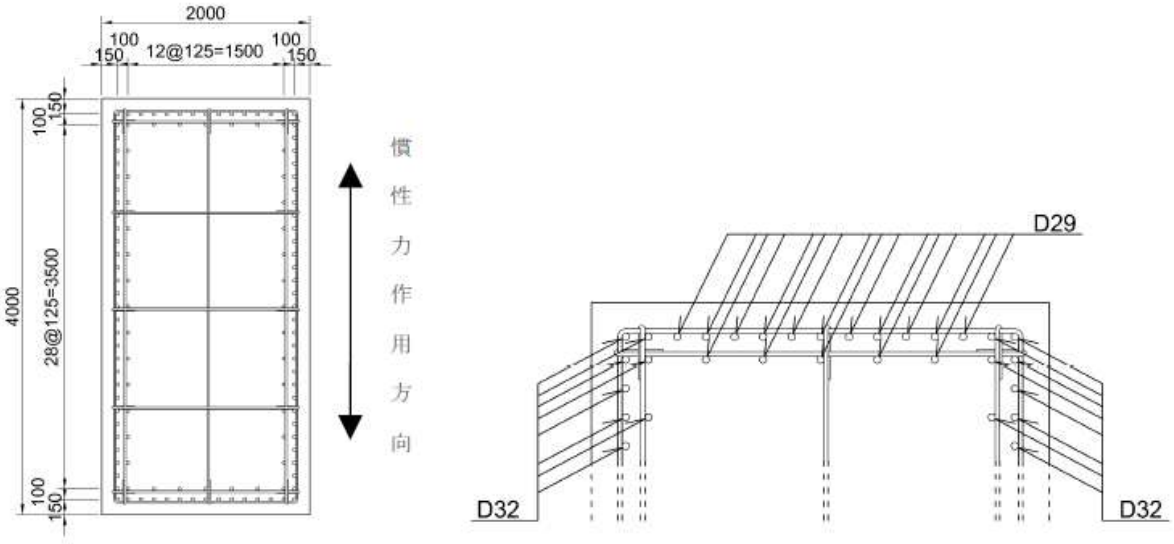
項目	設定値	
	橋軸方向（ケース 1）	橋軸直角方向（ケース 2）
断面高さ h(cm)	200	400
断面幅 b(cm)	400	200
コンクリートヤング係数 Ec(kN/mm2)	28	28
鉄筋ヤング係数 Es(kN/mm2)	200	200
コンクリート強度 fc(N/mm2)	30	30
鉄筋降伏強度 fy(N/mm2)	345	345
軸力 N(kN)	8000	8000



・軸方向鉄筋径：D32
・横拘束鉄筋径：D19
・横拘束鉄筋間隔：150mm
・橋脚高さ：10m

図 4-1(a)　配筋条件（橋軸方向）

（「道路橋の耐震設計における鉄筋コンクリート橋脚の水平力－水平変位関係の計算例（H24 版道示対応）（社）日本道路協会（当時）　平成 24 年 5 月」より抜粋）



・軸方向鉄筋筋径：D32, D29
・横拘束鉄筋径：D19
・横拘束鉄筋間隔：150mm
・橋脚高さ：10m

図 4-1(b)　配筋条件（橋軸直角方向）

（「道路橋の耐震設計における鉄筋コンクリート橋脚の水平力－水平変位関係の計算例（H24 版道示対応）（社）日本道路協会（当時）　平成 24 年 5 月」より抜粋）

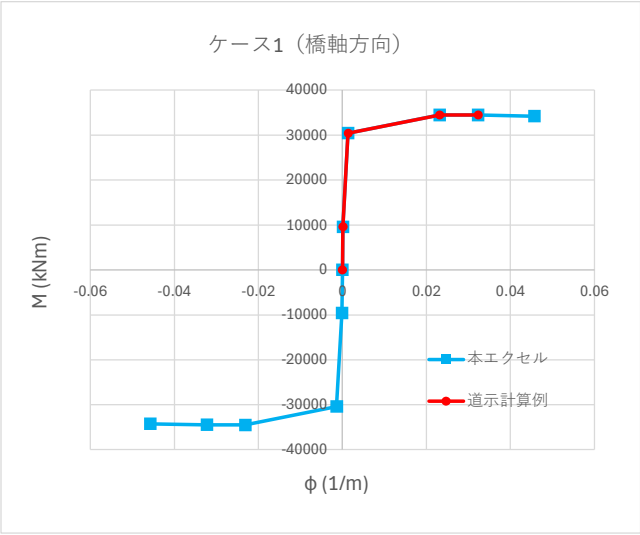
4.2 計算結果

図 4-2 に、本マクロで算出した M-φ関係を示す。同図には、道示計算例の結果も併記した。両者の計算結果は、ほぼ一致していることがわかる。

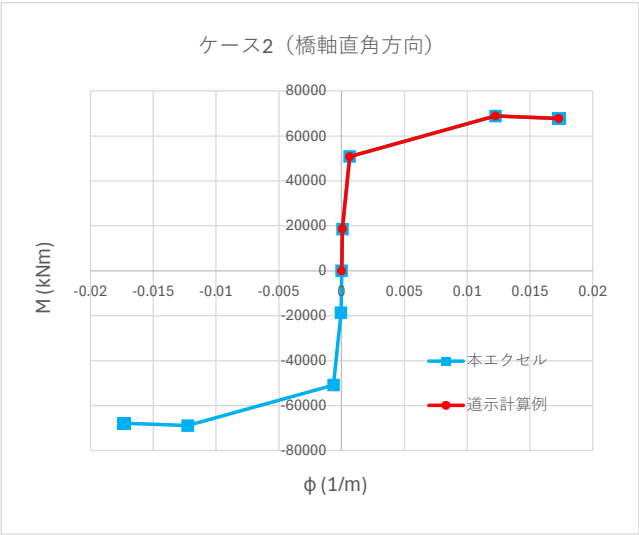
表 4-2～6 に、本マクロ、道示計算例および過去作成マクロ（過去記事「分割法による矩形 RC 断面の Mφ限界値計算」）の Mφ算出結果を示す。

ここに、過去作成マクロとは、過去の記事「分割法による矩形 RC 断面の Mφ限界値計算」において掲載したエクセルマクロである。過去作成マクロの計算条件として、(1)コンクリート断面積から鉄筋断面積を差し引かない、(2)ひび割れ時以外の限界値の算出においてコンクリート引張強度は無視する、(3)側方鉄筋の鉄筋量を平均化し全ての段の鉄筋断面積を同一とすることを考慮した。このうち(3)は過去作成時のマクロと同じ設定であり、一方(1)と(2)は過去作成時のマクロから修正を行ったものである。

表 4-2～6 において、本マクロのケース 3 および 4 は、それぞれ橋軸方向および橋軸直角方向の結果であるが、過去作成マクロと同じ条件となるように、側方鉄筋の鉄筋断面積を平均化して設定したものである。道示計算例と過去作成マクロについては、ケース 3 および 4 においてケース 1 および 2 と同一のデータを掲載している。側方鉄筋を平均化しないケースと平均化したケースでやや違いが見られるが、本マクロ、道示計算例および過去作成マクロの 3 者でほぼ一致する結果となっている。



(a)橋軸方向



(b)橋軸直角方向

図 4-2　M-φ関係

表 4-2　本マクロ

本エクセル（A）										
ケース	ひび割れ(正側)		降伏(正側)		引張限界2(正側)		引張限界3(正側)		圧縮限界(正側)	
	Mc(+)(kNm)	φc(+)(1/m)	My(+)(kNm)	φy(+)(1/m)	Mut2(+)(kNm)	φut2(+)(1/m)	Mut3(+)(kNm)	φut3(+)(1/m)	Mu(+)(kNm)	φu(+)(1/m)
1	9587.517	0.000112	30413.537	0.001360	34485.575	0.023117	34452.942	0.032248	34205.597	0.045741
2	18636.664	0.000056	50846.951	0.000643	68901.862	0.012249	67796.376	0.017300	67774.345	0.017367
3	9593.088	0.000112	30481.924	0.001360	34480.239	0.023112	34454.811	0.032248	34207.445	0.045732
4	18653.557	0.000056	51030.973	0.000643	68960.067	0.012236	67920.044	0.017265	67840.644	0.017521

表 4-3　道示計算例

道示計算例（B）										
ケース	ひび割れ(正側)		降伏(正側)		引張限界2(正側)		引張限界3(正側)		圧縮限界(正側)	
	Mc(+)(kNm)	φc(+)(1/m)	My(+)(kNm)	φy(+)(1/m)	Mut2(+)(kNm)	φut2(+)(1/m)	Mut3(+)(kNm)	φut3(+)(1/m)	Mu(+)(kNm)	φu(+)(1/m)
1	9588	0.000112	30410	0.001360	34490	0.023150	34460	0.032320		
2	18640	0.000056	50840	0.000643	68900	0.012240	67800	0.017300		
3	9588	0.000112	30410	0.001360	34490	0.023150	34460	0.032320		
4	18640	0.000056	50840	0.000643	68900	0.012240	67800	0.017300		

表 4-4　過去作成のマクロ

分割法Mφ限界値（過去作成のマクロ）（C）										
ケース	ひび割れ(正側)		降伏(正側)		引張限界2(正側)		引張限界3(正側)		圧縮限界(正側)	
	Mc(+)(kNm)	φc(+)(1/m)	My(+)(kNm)	φy(+)(1/m)	Mut2(+)(kNm)	φut2(+)(1/m)	Mut3(+)(kNm)	φut3(+)(1/m)	Mu(+)(kNm)	φu(+)(1/m)
1	9592.9	0.000112	30463.2	0.001359	34478.1	0.023109	34454.8	0.032225	34207.945	0.045533
2	18653	0.000056	51003	0.000643	68960	0.012235	67930	0.017259	67841.104	0.017570
3	9592.9	0.000112	30463.2	0.001359	34478.1	0.023109	34454.8	0.032225	34207.945	0.045533
4	18653	0.000056	51003	0.000643	68960	0.012235	67930	0.017259	67841.104	0.017570

表 4-5　本マクロと道示計算例の比較

比（A/B）										
ケース	ひび割れ(正側)		降伏(正側)		引張限界2(正側)		引張限界3(正側)		圧縮限界(正側)	
	Mc(+)(kNm)	φc(+)(1/m)	My(+)(kNm)	φy(+)(1/m)	Mut2(+)(kNm)	φut2(+)(1/m)	Mut3(+)(kNm)	φut3(+)(1/m)	Mu(+)(kNm)	φu(+)(1/m)
1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	1.000	0.998		
2	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.001	1.000	1.000		
3	1.001	1.000	1.002	1.000	1.000	0.998	1.000	0.998		
4	1.001	1.000	1.004	1.000	1.001	1.000	1.002	0.998		

表 4-6　本マクロと過去作成のマクロとの比較

比（A/C）										
ケース	ひび割れ(正側)		降伏(正側)		引張限界2(正側)		引張限界3(正側)		圧縮限界(正側)	
	Mc(+)(kNm)	φc(+)(1/m)	My(+)(kNm)	φy(+)(1/m)	Mut2(+)(kNm)	φut2(+)(1/m)	Mut3(+)(kNm)	φut3(+)(1/m)	Mu(+)(kNm)	φu(+)(1/m)
1	0.999	1.000	0.998	1.001	1.000	1.000	1.000	1.001	1.000	1.005
2	0.999	1.000	0.997	1.001	0.999	1.001	0.998	1.002	0.999	0.988
3	1.000	1.000	1.001	1.001	1.000	1.000	1.000	1.001	1.000	1.004
4	1.000	1.000	1.001	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.997

（注）ケース 1,3：橋軸方向、ケース 2,4：橋軸直角方向、

ケース 1,2：側方鉄筋の断面積を平均化しない、ケース 3,4：側方鉄筋の断面積を平均化して設定

参考資料　道示Ⅴのコンクリート応力ひずみ関係を用いたときの圧縮応力合力値 Pc と
中立軸周りモーメント Mc に関して

1. 道示Ⅴのコンクリート応力ひずみ関係

「道路橋示方書・同解説　Ⅴ　耐震設計編　平成 29 年 11 月　公益社団法人　日本道路協会」（道示Ⅴ）によれば、コンクリートの応力ひずみ関係が、横拘束筋の拘束効果を考慮して式(参 1)のように提示されている。

$$\sigma = f(\varepsilon) = \begin{cases} E_c\varepsilon\left\{1 - \frac{1}{n}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cc}}\right)^{n-1}\right\} & (\varepsilon \le \varepsilon_{cc}) \\ \sigma_{cc} - E_{des}(\varepsilon - \varepsilon_{cc}) & (\varepsilon > \varepsilon_{cc}) \end{cases} \quad (参\ 1)$$

ここに、$n = \frac{E_c\sigma_{cc}}{E_c\varepsilon_{cc} - \sigma_{cc}}$ (参 2)

$$\sigma_{cc} = \sigma_{ck} + 3.8\alpha\rho_s\sigma_{sy} \quad (参\ 3)$$

$$\varepsilon_{cc} = 0.002 + 0.033\beta\frac{\rho_s\sigma_{sy}}{\sigma_{ck}} \quad (参\ 4)$$

α, β ：矩形断面に対し、　α =0.2、β =0.4

$$E_{des} = 11.2\frac{\sigma_{ck}^2}{\rho_s\sigma_{sy}} \quad (参\ 5)$$

$$\rho_s = \frac{4A_h}{sd} \quad (参\ 6)$$

n：式(参 2)で定義される応力ひずみ関係の定数

σ cc：横拘束筋で拘束されたコンクリートの最大圧縮応力度

ε cc：コンクリートが最大圧縮応力度に達するときのひずみ

α, β ：断面補正係数

Edes：下降勾配

ρ s：横拘束筋の体積比。慣性力の作用方向と平行な方向に配置された横拘束筋によって分割されたコンクリート部分の中で最も小さい値とする。

Ah：横拘束筋 1 本あたりの断面積

s：横拘束筋の間隔

d：コンクリートの横拘束効果を考慮するための横拘束鉄筋の有効長

σ ck：コンクリートの設計基準強度

σ sy：横拘束筋の降伏応力度で上限を 345N/mm2 とする

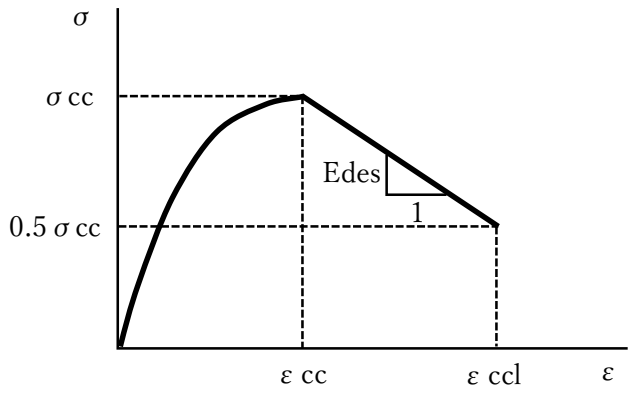
以下に、道示Ⅴとコ示（道示Ⅲ）のそれぞれに提示されるコンクリートの応力ひずみ関係の比較を行う。

式(参 1)において、n=2 としたとき、次式が得られる。

$$\sigma = f(\varepsilon) = \frac{E_c\varepsilon_{cc}}{2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cc}}\left(2 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cc}}\right) \quad (参\ 7)$$

一方、コ示の応力ひずみ関係は、ε < ε c0 のとき、次式で与えられる。

$$\sigma = \sigma_0\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}}\left(2 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}}\right) \quad (参\ 8)$$



σ cc：ピーク時の応力

ε cc：ピーク時のひずみ

Edes：下降勾配

ε ccl：限界圧縮ひずみ

参図 1　道示Ⅴのコンクリート応力ひずみ関係

ここに、σ 0=0.85fc（fc：コンクリート強度）である。

式(参 7)により、ピーク時応力 σ cc を求めると以下を得る。

$$\sigma_{cc} = f(\varepsilon_{cc}) = \frac{E_c \varepsilon_{cc}}{2} \quad \text{(参 9)}$$

したがって、道示Ⅴの応力ひずみ関係式は、

$$\sigma = \sigma_{cc} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cc}} \left(2 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cc}}\right) \quad \text{(参 10)}$$

式(参 10)と式(参 8)を比較すれば、n=2 の条件のもとに、ε cc= ε c0 および σ cc= σ 0 のとき、道示Ⅴとコ示の応力ひずみ関係式は同一になることがわかる。

ここで、横拘束筋の影響を無視し ρ s=0 とした場合を考慮すれば、式(参 3)および式(参 4)を用いて、道示Ⅴでは σ cc= σ ck および ε cc=0.002 が得られる。一方、コ示では σ 0=0.85fc および ε c0=0.002 である。

したがって、n=2 でかつ横拘束筋を無視した条件（ρ s=0）のもとでは、両者の応力ひずみ曲線の関数形が相似となり、ピーク時ひずみが同じ値の 0.002、一方コ示のピーク時応力が道示Ⅴの 0.85 倍になる。

2. コンクリートの限界圧縮ひずみと鉄筋の限界引張ひずみ

道示Ⅴによれば、終局状態として、最外圧縮鉄筋位置におけるコンクリートが限界圧縮ひずみ ε ccl に達したとき、および最外引張鉄筋が限界引張ひずみ ε st2, ε st3 に達したときの両者が考慮される。

コンクリートの限界圧縮ひずみ ε ccl は、道示Ⅴに従い、ピーク時応力 σ cc が 1/2 に低下したときのひずみとし、次式で表すことができる。

$$\varepsilon_{ccl} = \varepsilon_{cc} + \frac{0.5\sigma_{cc}}{E_{des}} \quad \text{(参 11)}$$

ここに、ε cc：最大圧縮応力 σ cc に達したときのひずみ（式(参 4)）

σ cc：応力ひずみ関係における最大圧縮応力（式(参 3)）

Edes：下降勾配（式(参 5)）

次に、道示Ⅴに従い、最外引張鉄筋の限界引張ひずみの算出式を示す。

限界状態 2 および 3 における軸方向鉄筋の限界引張ひずみ ε st2、 ε st3 は、次式で与えられる。

$$\varepsilon_{st2} = 0.025 \cdot L_p^{0.15} \varphi^{-0.15} \beta_s^{0.2} \beta_{c0}^{0.22} \quad (参\ 12)$$

$$\varepsilon_{st3} = 0.035 \cdot L_p^{0.15} \varphi^{-0.15} \beta_s^{0.2} \beta_{c0}^{0.22} \quad (参\ 13)$$

ここに、φ：上式により各限界状態に相当する軸方向鉄筋の引張ひずみを算出するための軸方向鉄筋の直径（mm）

Lp：塑性ヒンジ長（mm）で次式による

$$L_p = 9.5\sigma_{sy}^{1/6} \beta_n^{-1/3} \varphi' \quad (参\ 14)$$

ただし、Lp≦0.15h

σ sy：軸方向鉄筋の降伏強度（N/mm2）

β n：軸方向鉄筋のはらみ出しに対する抵抗を表すばね定数（N/mm2）で次式により算出する。

β n= β s+ β c0 (参 15)

β s：横拘束鉄筋の抵抗を表すばね定数（N/mm2）で、次式により算出する。

$$\beta_s = \frac{384 E_0 I_h}{n_s d'^3 s} \quad (参\ 16)$$

E0：横拘束鉄筋のヤング係数（N/mm2）

Ih：横拘束鉄筋の断面 2 次モーメント（mm4）

d’：塑性ヒンジ長を計算するための横拘束鉄筋の有効長（mm）で、慣性力の作用方向と平行な方向に配置する横拘束鉄筋によって分割されたコンクリート部分の中で最も大きい値とする。

ns：塑性ヒンジ長を算出するための横拘束鉄筋の有効長 d’が最も大きいコンクリート部分に配置される圧縮側軸方向鉄筋の本数で、複数段配筋される場合にはそれらの合計の本数とする。

s：横拘束鉄筋の間隔（mm）

β c0：かぶりコンクリートの抵抗を表すばね定数（N/mm2）で、次式により算出する。

β c0=0.01c0 (参 17)

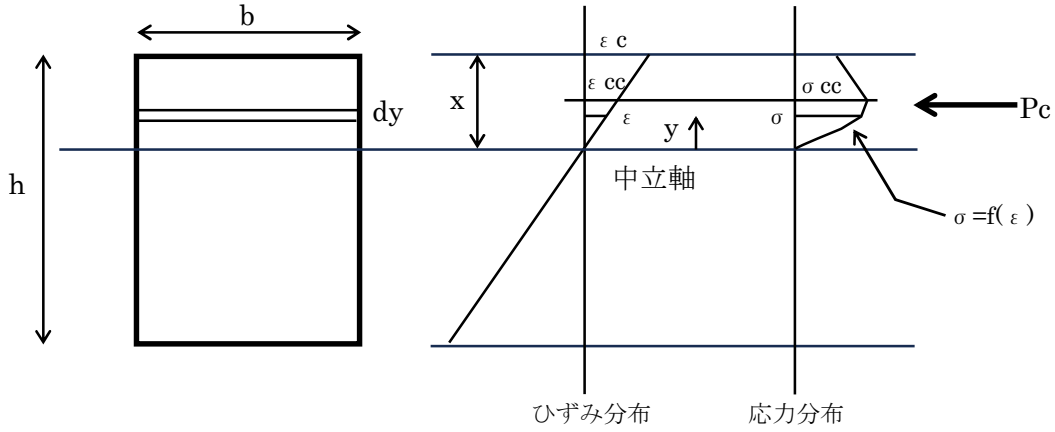
c0：塑性ヒンジ長を算出するための横拘束鉄筋の有効長 d’が最も大きいコンクリート部分の最外縁に配置された軸方向鉄筋の最外面からコンクリートの表面までの距離（mm）

φ’：塑性ヒンジ長を算出するための横拘束鉄筋の有効長 d’が最も大きいコンクリート部分に配置される軸方向鉄筋の直径（mm）で、40mm 以上の直径の軸方向筋を用いる場合には 40mm とする。

h：橋脚基部から上部構造の慣性力作用位置までの距離（mm）

3. コンクリート圧縮応力の合力値 Pc

参図 2 に、断面仮定を示す。参図 2 では、特に終局時あるいは降伏時を規定しておらず、圧縮縁ひずみ ε c のときのひずみ分布および応力分布を示すものである。



参図 2　断面仮定

[記号]

b：断面幅

h：断面高さ

x:：中立軸位置（圧縮縁からの長さ）

εc：圧縮縁ひずみ

ε cc：ピーク時ひずみ

σ cc：ピーク時応力

Pc：コンクリート圧縮応力総和

σ=f(ε)：コンクリートの応力ひずみ関係（参図 1 参照）

y：中立軸から上方にとった座標値

ε：y におけるひずみ

σ：y におけるコンクリート応力

参図 2 を参照し、圧縮縁ひずみは ε c のとき、圧縮縁から中立軸位置までに発生するコンクリート圧縮応力の総和 Pc を求める。なお、圧縮限界時および引張限界時には、最外圧縮鉄筋より外側の圧縮応力は無視されるが、この影響については、Pc の算出式において圧縮応力範囲の調整を行うことにより対応することとする。

(1) 圧縮縁ひずみ ε c がピーク時ひずみ ε cc 以下のとき（ε c≦ε cc，r≦1）

本ケースは、コンクリート圧縮応力が最大圧縮応力以下であり、応力低下が発生していない場合である。

圧縮応力総和 Pc は、次式で表される。

$$P_c = \int_0^x bf(\varepsilon)dy \qquad (参\ 18)$$

ひずみ分布から、$y = \frac{x}{\varepsilon_c}\varepsilon$ となるので、$dy = \frac{x}{\varepsilon_c}d\varepsilon$ が成立する。

$$P_c = \frac{bx}{\varepsilon_c}\int_0^{\varepsilon_c} f(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{E_c bx\varepsilon_{cc}}{\varepsilon_c}\int_0^{\varepsilon_c}\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cc}}\left\{1-\frac{1}{n}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cc}}\right)^{n-1}\right\}d\varepsilon \qquad (参\ 19)$$

ここで、$t = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cc}}$ および$r = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}}$ を定義すると、$\varepsilon = \varepsilon_{cc}t$ および$d\varepsilon = \varepsilon_{cc}dt$ より、次式を得る。

$$P_c = \frac{E_c bx\varepsilon_{cc}^2}{\varepsilon_c}\int_0^r t\left(1-\frac{1}{n}t^{n-1}\right)dt = \frac{n(n+1)r-2r^n}{2n(n+1)}E_c\varepsilon_{cc}bx \qquad (参\ 20)$$

ここに、$r = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}}$

(2)圧縮縁ひずみεcがピーク時ひずみεccを超えるとき（εc＞εcc，r＞1）

本ケースは、圧縮縁ひずみがピーク時ひずみεccを超過し、コンクリート圧縮域に応力低下領域が発生している場合である。

圧縮応力総和Pcは、0からεccまでとεccからεcまでを分けて、以下の通り表される。

$$P_c = \frac{bx}{\varepsilon_c}\int_0^{\varepsilon_{cc}} f(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{bx}{\varepsilon_c}\int_{\varepsilon_{cc}}^{\varepsilon_c} f(\varepsilon)d\varepsilon = I_1 + I_2 \qquad (参\ 21)$$

I_1は、式(参 19)の積分で積分範囲が0からεccの場合に相当するので、以下を得る。

$$I_1 = \frac{E_c bx\ {}^2_{cc}}{\varepsilon_c}\int_0^1 t\left(1-\frac{1}{n}t^{n-1}\right)dt = \frac{(n+2)(n-1)}{2n(n+1)}\frac{1}{r}E_c\varepsilon_{cc}bx \qquad (参\ 22)$$

次に、I_2を計算する。

$$I_2 = \frac{bx}{\varepsilon_c}\int_{\varepsilon_{cc}}^{\varepsilon_c}\{\sigma_{cc} - E_{des}(\varepsilon-\varepsilon_{cc})\}d\varepsilon \qquad (参\ 23)$$

I_1と同様に、変数tおよびrを定義すると、次式を得る。

$$I_2 = \frac{bx\varepsilon_{cc}^2}{\varepsilon_c}\int_1^r\left\{\frac{\sigma_{cc}}{\varepsilon_{cc}} - E_{des}(t-1)\right\}dt = bx\varepsilon_{cc}\frac{r-1}{2r}\left\{2\frac{\sigma_{cc}}{\varepsilon_{cc}} - E_{des}(r-1)\right\} \qquad (参\ 24)$$

ここで、式(参 2)より、$\frac{\sigma_{cc}}{\varepsilon_{cc}} = \frac{n-1}{n}E_c$ となるので、式(参 24)は次式となる。

$$I_2 = E_c bx\varepsilon_{cc}\frac{r-1}{2r}\left\{\frac{2(n-1)}{n} - \frac{E_{des}}{E_c}(r-1)\right\} \qquad (参\ 25)$$

したがって、

$$P_c = I_1 + I_2 = E_c\varepsilon_{cc}bx\frac{1}{r}\left[\frac{(n+2)(n-1)}{2n(n+1)} + \frac{r-1}{2}\left\{\frac{2(n-1)}{n} - \frac{E_{des}}{E_c}(r-1)\right\}\right] \qquad (参\ 26)$$

以上より、コンクリート圧縮応力の合力値Pcは、式(参 20)と式(参 26)により、次式で表すことができる。

$$P_c = \begin{cases} \frac{n(n+1)r-2r^n}{2n(n+1)}E_c\varepsilon_{cc}bx & (r \le 1) \\ \left[\frac{(n+2)(n-1)}{2n(n+1)} + \frac{r-1}{2}\left\{\frac{2(n-1)}{n} - \frac{E_{des}}{E_c}(r-1)\right\}\right]\frac{1}{r}E_c\varepsilon_{cc}bx & (r > 1) \end{cases} \qquad (参\ 27)$$

ここに、$r = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}}$

式(参 27)に示されるように、圧縮応力の合力値 Pc は、応力ひずみ関係のべき乗定数 n、ピーク時ひずみ ε cc に対する圧縮縁ひずみ ε c の比 r、コンクリートヤング係数 Ec、ピーク時ひずみ ε cc、断面幅 b、圧縮縁から中立軸位置までの距離 x、および下降勾配 Edes により表すことができる。

以下では、n=2 の場合を検討する。

r≦1 のとき、式(参 27)より、

$$P_c = \frac{r(3-r)}{6} E_c \varepsilon_{cc} b x \qquad (参\ 28)$$

ここで、式(参 2)において n=2 とすれば、$E_c\varepsilon_{cc} = 2\sigma_{cc}$となることから、

$$P_c = \frac{r(3-r)}{3} \sigma_{cc} b x \qquad (参\ 29)$$

r>1 のとき、式(参 27)より、コ示と同条件となるように Edes=0-とすれば、

$$P_c = \frac{3r-1}{6r} E_c \varepsilon_{cc} b x \qquad (参\ 30)$$

ここで、式(参 2)において n=2 とすれば、$E_c\varepsilon_{cc} = 2\sigma_{cc}$となることから、

$$P_c = \frac{3r-1}{3r} \sigma_{cc} b x \qquad (参\ 31)$$

式(参 29)および式(参 31)は、コ示の応力ひずみ関係を用いたときの Pc に一致する（別記事「多段配筋矩形断面に対する Mφ 限界値算出のエクセルマクロ」を参照)。

4. コンクリート圧縮応力による中立軸周りのモーメント Mc

(1) 圧縮縁ひずみ ε c がピーク時ひずみ ε cc 以下のとき（ε c≦ε cc，r≦1）

本ケースは、コンクリート圧縮応力が最大圧縮応力以下であり、応力低下が発生していない場合である。

コンクリート圧縮応力による中立軸周りのモーメント Mc は、次式で表される。

$$M_c = \int_0^x b f(\varepsilon) y dy \qquad (参\ 32)$$

ひずみ分布から、$y = \frac{x}{\varepsilon_c}\varepsilon$ となるので、$dy = \frac{x}{\varepsilon_c} d\varepsilon$ が成立する。

$$M_c = \frac{bx^2}{\varepsilon_c^2} \int_0^{\varepsilon_c} f(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon = \frac{E_c b x^2 \varepsilon_{cc}^2}{\varepsilon_c^2} \int_0^{\varepsilon_c} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cc}}\right)^2 \left\{1 - \frac{1}{n}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cc}}\right)^{n-1}\right\} d\varepsilon \qquad (参\ 33)$$

ここで、$t = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{cc}}$ および$r = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}}$ を定義すると、$\varepsilon = \varepsilon_{cc} t$ および$d\varepsilon = \varepsilon_{cc} dt$ より、次式を得る。

$$M_c = \frac{E_c b x^2 \varepsilon_{cc}^3}{\varepsilon_c^2} \int_0^r t^2 \left(1 - \frac{1}{n} t^{n-1}\right) dt = \frac{n(n+2)r - 3r^n}{3n(n+2)} E_c \varepsilon_{cc} b x^2 \qquad (参\ 34)$$

(2) 圧縮縁ひずみ ε c がピーク時ひずみ ε cc を超えるとき（ε c＞ε cc，r＞1）

本ケースは、圧縮縁ひずみがピーク時ひずみ ε cc を超過し、コンクリート圧縮域に応力低下領域が発生している場合である。

圧縮応力の中立軸周りモーメント Mc は、0 から ε cc までと ε cc から ε c までを分けて、以下の通り表される。

$$M_c = \frac{bx^2}{\varepsilon_c^2}\int_0^{\varepsilon_{cc}} f(\varepsilon)\varepsilon d\varepsilon + \frac{bx^2}{\varepsilon_c^2}\int_{\varepsilon_{cc}}^{\varepsilon_c} f(\varepsilon)\varepsilon d\varepsilon = I_1 + I_2 \qquad (参\ 35)$$

I_1は、式(参 33)の積分で積分範囲が 0 からεccの場合に相当するので、以下を得る。

$$I_1 = \frac{E_c b x^2 \varepsilon_{cc}^3}{\varepsilon_c^2}\int_0^1 t^2\left(1-\frac{1}{n}t^{n-1}\right)dt = \frac{(n+3)(n-1)}{3n(n+2)}\frac{1}{r^2}E_c\varepsilon_{cc}bx^2 \qquad (参\ 36)$$

次に、I_2を計算する。

$$I_2 = \frac{bx^2}{\varepsilon_c^2}\int_{\varepsilon_{cc}}^{\varepsilon_c}\{\sigma_{cc} - E_{des}(\varepsilon-\varepsilon_{cc})\}\varepsilon d\varepsilon \qquad (参\ 37)$$

I_1と同様に、変数 t および r を定義すると、次式を得る。

$$I_2 = \frac{bx^2\varepsilon_{cc}^3}{\varepsilon_c^2}\int_1^r\left\{\frac{\sigma_{cc}}{\varepsilon_{cc}} - E_{des}(t-1)\right\}t\,dt = \frac{bx^2\varepsilon_{cc}^3}{6\varepsilon_c^2}(r-1)\left\{3\left(\frac{\sigma_{cc}}{\varepsilon_{cc}}+E_{des}\right)(r+1) - 2E_{des}(r^2+r+1)\right\} \qquad (参\ 38)$$

ここで、式(参 2)より、$\frac{\sigma_{cc}}{\varepsilon_{cc}} = \frac{n-1}{n}E_c$ となるので、式(参 38)は次式となる。

$$I_2 = \frac{E_c\varepsilon_{cc}bx^2}{6}\frac{r-1}{r^2}\left\{\frac{3(n-1)}{n}(r+1) - \frac{E_{des}}{E_c}(r-1)(2r+1)\right\} \qquad (参\ 39)$$

したがって、

$$M_c = I_1 + I_2 = E_c\varepsilon_{cc}bx^2\frac{1}{r^2}\left[\frac{(n+3)(n-1)}{3n(n+2)} + \frac{r-1}{6}\left\{\frac{3(n-1)}{n}(r+1) - \frac{E_{des}}{E_c}(r-1)(2r+1)\right\}\right] \qquad (参\ 40)$$

以上より、コンクリート圧縮応力による中立軸周りモーメント Mc は、式(参 34)と式(参 40)により、次式で表すことができる。

$$M_c = \begin{cases} \frac{n(n+2)r-3r^n}{3n(n+2)}E_c\varepsilon_{cc}bx^2 & (r \le 1) \\ \left[\frac{(n+3)(n-1)}{3n(n+2)} + \frac{r-1}{6}\left\{\frac{3(n-1)}{n}(r+1) - \frac{E_{des}}{E_c}(r-1)(2r+1)\right\}\right]\frac{1}{r^2}E_c\varepsilon_{cc}bx^2 & (r > 1) \end{cases} \qquad (参\ 41)$$

ここに、$r = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}}$

式(参 41)に示されるように、圧縮応力の合力値 Pc は、応力ひずみ関係のべき乗定数 n、ピーク時ひずみεccに対する圧縮縁ひずみεcの比 r、コンクリートヤング係数 Ec、ピーク時ひずみεcc、断面幅 b、圧縮縁から中立軸位置までの距離 x、および下降勾配 Edes により表すことができる。

以下では、n=2 の場合を検討する。

r≦1 のとき、式(参 34)より、$M_c = \frac{r(8-3r)}{24}E_c\varepsilon_{cc}bx^2$ (参 42)

ここで、式(参 2)において n=2 とすれば、$E_c\varepsilon_{cc} = 2\sigma_{cc}$となることから、

$$M_c = \frac{r(8-3r)}{12}\sigma_{cc}bx^2 \qquad (参\ 43)$$

r>1 のとき、式(参 40)より、コ示と同条件となるように Edes=0 とすれば、

$$M_c = \frac{6r^2-1}{24r^2}E_c\varepsilon_{cc}bx^2 \qquad (参\ 44)$$

ここで、式(参 2)において n=2 とすれば、$E_c\varepsilon_{cc} = 2\sigma_{cc}$となることから、

$$M_c = \frac{6r^2-1}{12r^2}\sigma_{cc}bx^2 \qquad (参\ 45)$$

式(参 43)および式(参 45)は、コ示の応力ひずみ関係を用いたときの Mc に一致する（別記事「多段配筋矩形断面に対する Mφ 限界値算出のエクセルマクロ」を参照)。

5. まとめ

道示Ⅴのコンクリート応力ひずみ関係を用いたとき、圧縮応力の合力値 Pc および圧縮応力による中立軸周りのモーメント Mc は、以下の通りである。

$$P_c = \begin{cases} \dfrac{n(n+1)r-2r^n}{2n(n+1)}E_c\varepsilon_{cc}bx & (r \le 1) \\ \left[\dfrac{(n+2)(n-1)}{2n(n+1)} + \dfrac{r-1}{2}\left\{\dfrac{2(n-1)}{n} - \dfrac{E_{des}}{E_c}(r-1)\right\}\right]\dfrac{1}{r}E_c\varepsilon_{cc}bx & (r > 1) \end{cases} \qquad (参\ 46)$$

$$M_c = \begin{cases} \dfrac{n(n+2)r-3r^n}{3n(n+2)}E_c\varepsilon_{cc}bx^2 & (r \le 1) \\ \left[\dfrac{(n+3)(n-1)}{3n(n+2)} + \dfrac{r-1}{6}\left\{\dfrac{3(n-1)}{n}(r+1) - \dfrac{E_{des}}{E_c}(r-1)(2r+1)\right\}\right]\dfrac{1}{r^2}E_c\varepsilon_{cc}bx^2 & (r > 1) \end{cases} \qquad (参\ 47)$$

ここに、n：コンクリート応力ひずみ関係におけるべき乗定数

r：ピーク時ひずみ ε cc に対する圧縮縁ひずみ ε c の比（= ε c/ ε cc）

Ec：コンクリートヤング係数

ε cc：応力ひずみ関係において最大圧縮応力 σ cc に達するときのひずみ（ピーク時ひずみ）

b：断面幅

x：圧縮縁から中立軸までの距離

Edes：応力ひずみ関係の下降勾配