

エクセル表計算による多段配筋矩形断面の曲げ応力度算出

日中構造研究所 松原勝己
同上 朴 永軍

1. はじめに

先に、複鉄筋矩形断面に対する曲げ応力計算（RC 断面弾性計算）を、繰り返し計算に依らず、エクセル表計算によって実行する方法を提示した。この方法では、複鉄筋矩形断面の中立軸位置を、3次方程式の解の公式によって求めた。

本報告では、多段配筋矩形断面に対しても、同様の方法を遂行することを目的とし、中立軸位置 x を未知数とする陽な形の中立軸算定式および応力度算定式を誘導した。

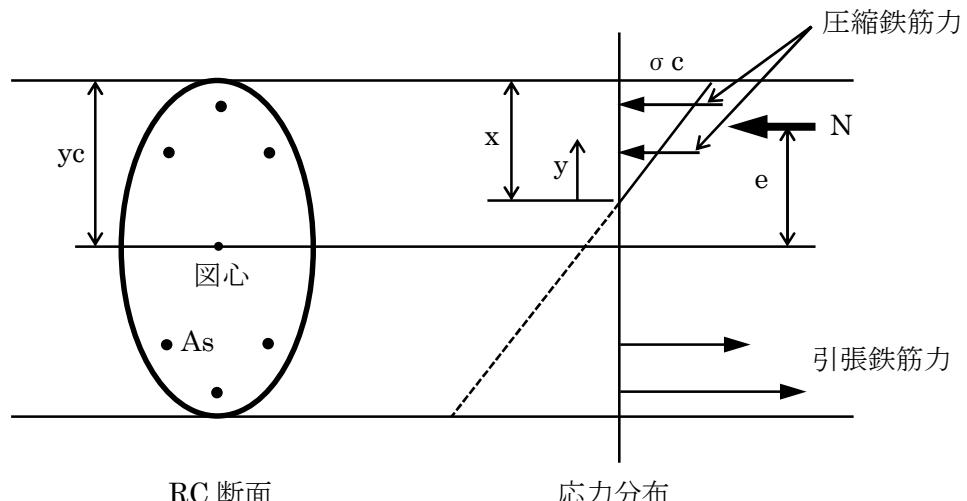
これにより、多段配筋矩形断面に対しても、中立軸算定式の解析解を得ることができるので、マクロやエクセルソルバーなどの繰り返し計算に依らず、応力度算出が可能となる。

上記の方法により、エクセルファイルを作成したので、応力度算出の方法とエクセルシートの説明を記載する。

掲載したエクセルファイルは自由に使用していただいて結構ですが、結果の妥当性判断は使用者に委ねることとします。

2. 左右対称断面における曲げ応力度の算出

応力算出時の断面仮定を、図 2-1 に示す。



【記号】

y_c : 圧縮縁から断面図心までの距離、 A_s : 鉄筋断面積

x : 圧縮縁から中立軸までの距離、 σ_c : 圧縮縁におけるコンクリート応力

y : 中立軸から圧縮縁方向を正とした距離 (y の位置でのコンクリート応力は $\sigma_c \cdot y/x$ となる)

N : 作用軸力 (断面図心位置に作用すると仮定)

e : 偏心距離 (作用曲げモーメント M を考慮した軸力偏心位置から図心までの距離、 $e=M/N$)

図 2-1 断面仮定

図2-1を参照し、断面軸方向の力の釣り合い、および中立軸周りのモーメントの釣り合いから、次式が成立する。

$$N = \int \sigma_c \frac{y}{x} dA + \sum n \sigma_c \frac{y}{x} A_s \quad (1)$$

$$N(x - y_c + e) = \int \sigma_c \frac{y^2}{x} dA + \sum n \sigma_c \frac{y^2}{x} A_s \quad (2)$$

ここに、nはヤング係数比であり、許容応力度法ではn=15が一般的に使用される。また、積分記号はコンクリート応力、総和記号は鉄筋応力に関するものであり、コンクリートについては圧縮領域に対する積分(dAは中立軸からyだけ離れた位置におけるコンクリート断面の微小面積)を、鉄筋については全鉄筋の総和を意味している。さらに、中立軸からyだけ離れた位置でのコンクリートおよび鉄筋の応力が、それぞれ $\sigma_c \cdot y/x$ および $n \sigma_c \cdot y/x$ で表されることを考慮している。

なお、式(1)および(2)において、 σ_c およびxは積分および総和記号に依存しないが、yおよびAsは積分および総和記号に依存する。また、軸力Nは圧縮を正と定義している。

ここで、中立軸に関する換算断面1次モーメント G_x および中立軸に関する換算断面2次モーメント I_x を定義すれば、式(1)および(2)は以下のように書き換えることができる。

$$N = \frac{\sigma_c}{x} G_x \quad (3)$$

$$N(x - y_c + e) = \frac{\sigma_c}{x} I_x \quad (4)$$

$$\text{ここに、 } G_x = \int y dA + \sum n A_s y \quad (5)$$

$$I_x = \int y^2 dA + \sum n A_s y^2 \quad (6)$$

上記の式(5)および(6)の換算1次および2次モーメントは、コンクリートについては、引張部分の寄与を無視し、鉄筋については断面積のn倍の寄与を考慮するものである。

式(3)および(4)より、N、 σ_c およびxを消去すれば、次式が得られる。

$$x - y_c + e = \frac{I_x}{G_x} \quad (7)$$

ここで、 $x - y_c + e$ は、中立軸から曲げモーメントを考慮した軸力偏心位置までの距離であり、これをdxと定義すれば、次式となる。

$$d_x = \frac{I_x}{G_x} \quad (8)$$

ここに、 $d_x = x - y_c + e$

式(8)は、中立軸周りの換算断面2次モーメント I_x を換算断面1次モーメント G_x で除した値が、中立軸から軸力偏心位置までの距離dxに等しいことを示している。上記の式(7)あるいは(8)が、中立軸位置xを求めるための方程式となる。なお、式(8)については、「日本建築学会：鉄筋コンクリート構造計算規準・同解説 2018年12月」や「土木学会：コンクリート標準示書解説・参考篇（1936年発行）」において提示されているものである。

式(7)において、 y_c は断面諸元（断面形状、鉄筋量および鉄筋配置）によって決まり、偏心距離 $e (=M/N)$ は作用断面力によって決まるのに対し、x、 I_x および G_x については中立軸位置に依存するために、陽な形でxを定めることができない。したがって、xの算定には繰り返し計算によるか、あるいはxに関する陽な方程式（3次方程式）を導入して解の公式による求解が必要になる。本報告では、矩形断面に対し後者の方法を用いて中立軸位置xを算出する。

式(7)で、 $e=M/N$ を考慮すれば、次式を得る。

$$G_x = \frac{I_x N}{N(x-y_c)+M} \quad (9)$$

中立軸算定式として、式(7)あるいは(8)を用いることもできるが、軸力がゼロ ($N=0$) のときゼロ割りが生じるので、式(9)を使用すると $N=0$ の場合でも対応可能である。なお、式(9)より $N=0$ のとき $G_x=0$ となることがわかる。

さらに、式(9)を変形すれば、次式が得られる。

$$\{G_x(x - y_c) - I_x\}N + G_x M = 0 \quad (10)$$

本報告では、式(10)の左辺を $f(x)$ と置き、 $f(x)=0$ を中立軸算定式として使用することとする。

すなわち、

$$\text{中立軸算定式 : } f(x) = 0 \quad (10b)$$

$$\text{ここに、 } f(x) = \{G_x(x - y_c) - I_x\}N + G_x M \quad (10c)$$

G_x : 中立軸周りの換算断面 1 次モーメント

I_x : 中立軸周りの換算断面 2 次モーメント

x : 中立軸から圧縮縁までの距離、 y_c : 図心から圧縮縁までの距離

N : 軸力、 M : 曲げモーメント

次に、コンクリート圧縮縁および鉄筋の発生応力は、以下の通り導出できる。

式(4)において、 $e=M/N$ を考慮すれば、コンクリート圧縮縁における応力 σ_c として、次式を得る。

$$\sigma_c = \frac{N(x-y_c)+M}{I_x} x \quad (11)$$

式(11)に、中立軸位置 x を代入することで、コンクリート圧縮縁の応力値を求めることができる。

また、鉄筋応力 σ_{si} については、断面高さ方向の応力分布の直線性を考慮し、以下の式で表すことができる。ここに、鉄筋応力 σ_{si} は引張を正と定義した。

$$\sigma_{si} = -\frac{x-c_i}{x} n \sigma_c \quad (12)$$

ここに、 c_i は、圧縮縁から鉄筋位置までの断面高さ方向の距離（圧縮縁からの被り厚さ）である。

3. 多段配筋矩形断面の曲げ応力度

3.1 中立軸が断面内にある場合

多段配筋矩形断面（幅 b ×高さ h ）に対する中立軸周りの換算断面 1 次および 2 次モーメントは、中立軸が断面内に存在する場合、次式で表すことができる。

$$G_x = \frac{bx^2}{2} + \sum nA_{si}(x - c_i) \quad (13)$$

$$I_x = \frac{bx^3}{3} + \sum nA_{si}(x - c_i)^2 \quad (14)$$

ここに、 b : 断面幅

n : ヤング係数比 (=15)

A_{si} : 第 i 段目の鉄筋断面積

ci : 第 i 段目の鉄筋かぶり (圧縮縁からの距離)

さらに、図心位置 y_c は、次式で表される。

$$y_c = \frac{\frac{bh^2}{2} + n \sum A_{si} c_i}{bh + n \sum A_{si}} \quad (15)$$

ここに、h : 断面高さ

式(13)および(14)を、式(10)に代入すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{bx^2}{2} (x - y_c) + (x - y_c) \sum nA_{si} (x - c_i) - \frac{bx^3}{3} - \sum nA_{si} (x - c_i) - \frac{bx^3}{3} - \sum nA_{si} (x - c_i)^2 \right\} N \\ & + \frac{bx^2}{2} M + M \sum nA_{si} (x - c_i) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

式(16)を x に関して整理すれば、次式を得る。

$$\frac{bN}{6} x^3 + \frac{b}{2} (M - Ny_c) x^2 + x \sum nA_{si} \{M + N(c_i - y_c)\} - \sum nA_{si} c_i \{M + N(c_i - y_c)\} = 0 \quad (17)$$

ここで、e=M/N (偏心軸力位置から図心までの距離) を定義し、式(17)の両辺に、6/(bh³N)を乗じると、次式を得る。ここに、h は部材の断面高さ (全高) である。

$$\left(\frac{x}{h}\right)^3 + 3 \frac{e-y_c}{h} \left(\frac{x}{h}\right)^2 + 6 \frac{x}{h} \sum n \frac{A_{si}}{bh} \left(\frac{e-y_c}{h} + \frac{c_i}{h}\right) - 6 \sum n \frac{A_{si} c_i}{bh h} \left(\frac{e-y_c}{h} + \frac{c_i}{h}\right) = 0 \quad (18)$$

ここで、次の無次元パラメータを定義する。

$$k = \frac{x}{h} \quad (\text{中立軸比})$$

$$\delta = \frac{e-y_c}{h} \quad (\text{圧縮縁から偏心軸力位置までの距離の断面高さに対する比})$$

$$e = \frac{M}{N} \quad (\text{偏心軸力位置から図心までの距離})$$

$$\gamma_i = \frac{c_i}{h} \quad (\text{第 } i \text{ 段目鉄筋被りの断面高さに対する比})$$

$$p_i = \frac{A_{si}}{bh} \quad (\text{第 } i \text{ 段目鉄筋の鉄筋比})$$

なお、上記の無次元パラメータ k、δ、γ_i および p_i の定義において、有効高ではなく断面高さを使用していることに注意する必要がある。

式(18)は、上記パラメータを用いて、次式で表すことができる。

$$k^3 + 3\delta k^2 + 6nk \sum p_i (\gamma_i + \delta) - 6n \sum p_i \gamma_i (\gamma_i + \delta) = 0 \quad (19)$$

式(19)が、多段配筋矩形断面における中立軸算定式となる。

特に、複鉄筋に対しては、無次元パラメータの定義において、断面高 h の代わりに有効高 d₁ (圧縮縁から引張鉄筋までの距離) を使用すれば、p₁=A_{s1}/(bd₁)、p₂=A_{s2}/(bd₁)、γ₁=d₁/d₁=1、および γ₂=d₂/d₁=γ (d₂ : 圧縮鉄筋被り) を考慮し、式(19)は次式となる。

$$k^3 + 3\delta k^2 + 6n \{p_1(1 + \delta) + p_2(\delta + \gamma)\} k - 6n \{p_1(1 + \delta) + p_2\gamma(\delta + \gamma)\} = 0 \quad (20)$$

この式(20)は、複鉄筋矩形断面における中立軸算定式に一致していることがわかる[参考文献(3)]。

さらに、軸力 N=0 のとき、式(17)において N=0 とすれば、次式を得る。

$$bx^2 + 2x \sum nA_{si} - 2 \sum nA_{si} c_i = 0 \quad (21)$$

式(21)の両辺に、1/(bh²)を乗じ、無次元パラメータ k、p_i および γ_i を用いると、次式を得る。

$$k^2 + 2nk \sum p_i - 2n \sum p_i \gamma_i = 0 \quad (22)$$

特に、複鉄筋に対しては、無次元パラメータの定義において、断面高 h の代わりに有効高 d_1 (圧縮縁から引張鉄筋までの距離) を使用すれば、 $p_1=A_{s1}/(bd_1)$ 、 $p_2=A_{s2}/(bd_1)$ 、 $\gamma_1=d_1/d_1=1$ 、および $\gamma_2=d_2/d_1=\gamma$ (d_2 : 圧縮鉄筋被り) を考慮し、式(22)は次式となる。

$$k^2 + 2n(p_1 + p_2)k - 2n(p_1 + p_2\gamma) = 0 \quad (23)$$

この式(23)は、複鉄筋矩形断面における軸力ゼロの中立軸算定式に一致していることがわかる。

以上より、中立軸が断面内にある場合、多段配筋矩形断面の中立軸算定式は、以下の通り表すことができる。

軸力 $N \neq 0$ のとき :

$$k^3 + 3\delta k^2 + 6nk \sum p_i(\gamma_i + \delta) - 6n \sum p_i \gamma_i (\gamma_i + \delta) = 0 \quad (24)$$

軸力 $N=0$ のとき :

$$k^2 + 2nk \sum p_i - 2n \sum p_i \gamma_i = 0 \quad (25)$$

ここに、 $k = \frac{x}{h}$ (中立軸比、ただし断面高さに対する比)

$\delta = \frac{e-y_c}{h}$ (圧縮縁から偏心軸力位置までの距離の断面高さに対する比)

$e = \frac{M}{N}$ (偏心軸力位置から図心までの距離)

$\gamma_i = \frac{c_i}{h}$ (第 i 段目鉄筋被りの断面高さに対する比)

$p_i = \frac{A_{si}}{bh}$ (第 i 段目鉄筋の鉄筋比、ただし全断面積に対する比)

h : 断面高さ

次に、コンクリートおよび鉄筋の発生応力については、式(24)あるいは(25)により中立軸比 k を求めた後、 $x=kh$ により中立軸位置を算出し、式(11)および(12)に x を代入して求めればよい。

3.2 中立軸が断面外にある場合

全断面が圧縮応力あるいは引張応力となる場合には、中立軸が断面外に存在するため、2.1 の換算断面1次モーメントおよび換算断面2次モーメントとは異なったものとなる。

全断面圧縮のとき、中立軸位置が $x>h$ となり、中立軸周りの換算断面1次および2次モーメントが次式で表される。

$$G_x = bh \left(x - \frac{h}{2} \right) + \sum nA_{si}(x - c_i) \quad (26)$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} + bh \left(x - \frac{h}{2} \right)^2 + \sum nA_{si}(x - c_i)^2 \quad (27)$$

式(26)および式(27)を、式(10)に代入し、 x に関して整理すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} &x \left\{ bh \left(\frac{h}{2} - y_c \right) + \sum nA_{si}(c_i - y_c) + \frac{M}{N} (bh + \sum nA_{si}) \right\} \\ &+ \left\{ bh^2 \left(\frac{y_c}{2} - \frac{h}{3} \right) + \sum nA_{si}c_i(y_c - c_i) - \frac{M}{N} \left(\frac{bh^2}{2} + \sum nA_{si}c_i \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

ここで、 $e=M/N$ (偏心軸力位置から図心までの距離) を定義し、両辺に $(1/(bh^3))$ を乗じると、次式を得る。

$$\frac{x}{h} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{e-y_c}{h} + \sum n \frac{A_{si}}{bh} \left(\frac{c_i}{h} + \frac{e-y_c}{h} \right) \right\} - \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{e-y_c}{h} + \sum n \frac{A_{si}}{bh} \frac{c_i}{h} \left(\frac{c_i}{h} + \frac{e-y_c}{h} \right) \right\} = 0 \quad (29)$$

ここで、次の無次元パラメータを定義する。

$$k = \frac{x}{h} \text{ (中立軸比)}$$

$$\delta = \frac{e-y_c}{h} \text{ (圧縮縁から偏心軸力位置までの距離の断面高さに対する比)}$$

$$e = \frac{M}{N} \text{ (偏心軸力位置から図心までの距離)}$$

$$\gamma_i = \frac{c_i}{h} \text{ (第 } i \text{ 段目鉄筋被りの断面高さに対する比)}$$

$$p_i = \frac{A_{si}}{bh} \text{ (第 } i \text{ 段目鉄筋の鉄筋比)}$$

式(29)は、上記の無次元パラメータを用いて、次式となる。

$$3k\{1 + 2\delta + 2n \sum p_i(\gamma_i + \delta)\} - \{2 + 3\delta + 6n \sum p_i\gamma_i(\gamma_i + \delta)\} = 0 \quad (30)$$

式(30)を k について解けば、次式を得る。

$$k = \frac{2+3\delta+6n \sum p_i\gamma_i(\gamma_i+\delta)}{3\{1+2\delta+2n \sum p_i(\gamma_i+\delta)\}} \quad (31)$$

全断面引張に対しては、式(26)および(27)において、コンクリート部分の寄与が無くなり、鉄筋部分の寄与のみとなるので、中立軸比 k として、次式が得られる。

$$k = \frac{\sum p_i\gamma_i(\gamma_i+\delta)}{\sum p_i(\gamma_i+\delta)} \quad (32)$$

以上より、中立軸が断面外にある場合（全断面圧縮あるいは全断面引張）、多段配筋矩形断面の中立軸算定式は、以下の通り表すことができる。

全断面圧縮のとき (x>h) :

$$k = \frac{2+3\delta+6n \sum p_i\gamma_i(\gamma_i+\delta)}{3\{1+2\delta+2n \sum p_i(\gamma_i+\delta)\}} \quad (33)$$

全断面引張のとき (x<0) :

$$k = \frac{\sum p_i\gamma_i(\gamma_i+\delta)}{\sum p_i(\gamma_i+\delta)} \quad (34)$$

ここに、 $k = \frac{x}{h}$ (中立軸比、ただし断面高さに対する比)

$$\delta = \frac{e-y_c}{h} \text{ (圧縮縁から偏心軸力位置までの距離の断面高さに対する比)}$$

$$e = \frac{M}{N} \text{ (偏心軸力位置から図心までの距離)}$$

$$\gamma_i = \frac{c_i}{h} \text{ (第 } i \text{ 段目鉄筋被りの断面高さに対する比)}$$

$$p_i = \frac{A_{si}}{bh} \text{ (第 } i \text{ 段目鉄筋の鉄筋比、ただし全断面積に対する比)}$$

h : 断面高さ

次に、コンクリートおよび鉄筋の発生応力については、式(33)および(34)により中立軸比 k を求めた後、 $x=kh$ により中立軸位置を算出し、式(11)および(12)に x を代入して求めればよい。ただし、全断面引張に対しては、コンクリート応力 $\sigma_c=0$ であり、また鉄筋応力 σ_{si} の換算断面 2 次モーメント I_x の計算でコンクリートの寄与分を無視する必要がある。

4. 中立軸比 k の解

中立軸比 k に関する方程式は、3.1 で提示したように、以下の 3 次方程式で表される。

$$k^3 + Ak^2 + Bk + C = 0 \quad (35)$$

$$\text{ここに、 } A = 3\delta \quad (35a)$$

$$B = 6n \sum p_i(\gamma_i + \delta) \quad (35b)$$

$$C = -6n \sum p_i \gamma_i (\gamma_i + \delta) \quad (35c)$$

なお、式(35a)～(35c)に含まれるパラメータ n、 p_i 、 γ_i 、および δ については、3.1 の記載を参照されたい。

ここで、 $k=k'-A/3$ に置き換えれば、次式を得る。

$$k'^3 + Pk' + Q = 0 \quad (36)$$

$$\text{ここに、 } P = -\frac{A^2}{3} + B \quad (36a)$$

$$Q = \frac{2}{27} A^3 - \frac{AB}{3} + C \quad (36b)$$

3 次方程式(36)は、カルダノの方法によって解が得られており、式(35)の解を以下の通り求めることができる[参考文献(4)]。判別式 D の符号により、以下の 2 通りの実数解が存在する。

$$(1) D = \left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3 > 0 \quad \text{のとき}$$

1 個の実数解が存在し（他の 2 個は複素数解）、式(35)の解が次式で表される。

$$k_1 = \sqrt[3]{r_1} + \sqrt[3]{r_2} - \frac{A}{3} \quad (37)$$

$$\text{ここに、 } r_1 = -\frac{Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3} \quad (37a)$$

$$r_2 = -\frac{Q}{2} - \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3} \quad (37b)$$

$$(2) D = \left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3 \leq 0 \quad \text{のとき}$$

3 個の実数解が存在し、式(35)の解が次式で得られる。特に、D=0 のとき、2 個の実数解（1 組は重根）となる。

$$k_1 = 2\sqrt[3]{r} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \frac{A}{3} \quad (38)$$

$$k_2 = -2\sqrt[3]{r} \cos\left(\frac{\theta}{3} - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{A}{3} \quad (39)$$

$$k_3 = -2\sqrt[3]{r} \cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{A}{3} \quad (40)$$

$$\text{ここに、 } r = \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left|\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3\right|} \quad (38a)$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{Q}{2r}\right) \quad (38b)$$

5. エクセルシート

5.1 入力データ

1 断面につき、エクセルシートが 1 枚に入・出力データが記載される。

入力データは、以下の通りである。

- ・曲げモーメント $M(\text{kNm})$

断面に作用する曲げモーメントを kNm 単位で入力する。負曲げに対し、負値の入力が可能である。

負値を入力したとき、正値に変換し、鉄筋被り位置を上下逆転させて曲げ応力の計算を行う。鉄筋被りを逆転させたデータは、「修正 ci 」に記載される。

- ・軸力 $N(\text{kN})$

断面に作用する軸力を kN 単位で入力する。圧縮軸力を正とし、負値を入力すると引張軸力を表す。

- ・断面高さ $h(\text{cm})$

断面高さ（全高）を cm 単位で入力する。

- ・断面幅 $b(\text{cm})$

断面の幅を cm 単位で入力する。

- ・コンクリート許容応力度 $\sigma_{ca}(\text{N/mm}^2)$

コンクリートの許容圧縮応力度を N/mm^2 単位で入力する。

- ・鉄筋の許容応力度 $\sigma_{sa}(\text{N/mm}^2)$

鉄筋の許容引張応力度を N/mm^2 で入力する。

- ・鉄筋被り $ci(\text{cm})$

第 i 段目鉄筋の正曲げ時の圧縮縁から鉄筋中心までの距離を cm 単位で入力する。本データは、鉄筋の段数分を入力する。

- ・鉄筋量 $As_i(\text{cm}^2)$

第 i 段目鉄筋の鉄筋断面積を cm^2 単位で入力する。本データは、鉄筋の段数分を入力する。

5.2 出力データ

出力データは、以下の通りである。

- ・中立軸位置 $x(\text{cm})$

圧縮縁から中立軸までの距離を cm 単位で出力する。中立軸比 k および断面高さ h から、 $x=kh$ で算出する。圧縮縁から断面内に向かう方向を x の正としている。したがって、中立軸が断面内にあるとき、 $0 < x < h$ であり、全断面圧縮のとき $x > h$ 、全断面引張のとき $x < 0$ となる。

- ・コンクリート応力 $\sigma_c(\text{N/mm}^2)$

コンクリート圧縮縁の応力を N/mm^2 単位で出力する。圧縮正である。

- ・鉄筋応力 $\sigma_s(\text{N/mm}^2)$

引張側最外鉄筋の応力を N/mm^2 単位で出力する。引張正である。データ「修正 ci 」が最大の正值となる鉄筋の応力を出力している。

- ・圧縮鉄筋応力 $\sigma_{s'}(\text{N/mm}^2)$

圧縮側最外鉄筋の応力を N/mm² 単位で出力する。引張正である。データ「修正 ci」が最小の正值となる鉄筋の応力を出力している。

- 照査値 σ_c / σ_{ca}

コンクリート許容応力に対するコンクリート応力の比を出力する。

- 照査値 σ_s / σ_{sa}

鉄筋許容応力に対する鉄筋応力の比を出力する。

- 判定(σ_c)

$\sigma_c / \sigma_{ca} < 1$ のとき OK、それ以外のとき NG を出力する。

- 判定(σ_s)

$\sigma_s / \sigma_{sa} < 1$ のとき OK、それ以外のとき NG を出力する。

5.3 その他のパラメータ

- ヤング係数比 n

許容応力度法に対する値 $n=15$ を設定している。

- y_c (図心)、 $y_c (=h/2)$

軸力作用位置を決定するパラメータであり、圧縮縁から軸力作用位置までの距離を表す。RC 断面時（中立軸が断面内）には、 y_c を断面中心 ($y_c=h/2$) とし、全断面圧縮時 ($x>h$) には y_c を図心位置としている。

- e

曲げモーメントを考慮した軸力偏心位置と断面中心（あるいは図心）との距離であり、 $e=M/N$ で算出される。

- δ (図心)、 $\delta (h/2)$

軸力偏心位置と圧縮縁との距離の断面高さ h に対する比で、 $\delta = (e - y_c)/h$ で計算される。

- 鉄筋パラメータ

$c_i^* A_{si}$: 第 i 段目鉄筋の被りと断面積の積。図心位置計算するために用いる。

p_i : 第 i 段目鉄筋の鉄筋比 ($p_i=A_{si}/(bh)$)。総和を $N=0$ の中立軸算定式に用いる。

γ_i : 第 i 段目鉄筋の被りの断面高さに対する比 ($\gamma_i=c_i/h$)。

$p_i \gamma_i$: 第 i 断面鉄筋の p_i と γ_i の積。総和を $N=0$ の中立軸算定式に用いる。

$p_i(\gamma_i + \delta), p_i \gamma_i (\gamma_i + \delta)$: 総和を RC 断面、全断面圧縮および全断面引張の中立軸の算定で用いる。

$n A_{si}(x - c_i)^2$: 中立軸周りの鉄筋の断面 2 次モーメント。 σ_c の計算で用いる。

- A,B,C

RC 断面時の中立軸算定式 (k に関する 3 次方程式) における k^2 および k の係数と定数項。式(35a)～(35c)を参照。

- P,Q

変換後の 3 次方程式の係数値。A,B および C から計算される。式(36a)、(36b)を参照。

- 判別式 D

D の符号により 3 次方程式の解の性質が異なる。D>0 のとき、1 実根。D<0 のとき、3 実根。D=0 のとき、2 実根（1つが重根）。

- r1,r2,r,θ

解を記述するパラメータであり、式(37a)、(37b)、(38a)、(38b)を参照。

- k1,k2,k3

中立軸比 k に関する 3 次方程式の解であり、式(37)～(40)を参照。

- k(RC)

RC 断面時の中立軸比で、 k_1 、 k_2 および k_3 のうち、1 つを選択する。 $D>0$ のとき、 k_1 を選択する。 $D\leq 0$ のとき、 k_1 および k_3 のうち 1 よりも小さい正值、あるいは k_1 を選択する。

- k(N=0)

$N=0$ のときの中立軸比。 k に関する 2 次方程式(25)の解である。

- k(圧縮)

全断面圧縮時 ($x>h$) の中立軸比。式(33)を参照。

- k(引張)

全断面引張時 ($x<0$) の中立軸比。式(34)を参照。

- k

最終的に定まる中立軸比。 $N=0$ のとき、 $k(N=0)$ を選択。 $N\neq 0$ 、 $k(RC)>1$ 、 $N>0$ のとき、 $k(\text{圧縮})$ を選択。 $N\neq 0$ 、 $k(RC)>1$ 、 $N<0$ のとき、 $k(\text{引張})$ を選択。それ以外のとき、 $k(RC)$ を選択する。

5.4 鉄筋段数の制限に関して

本エクセルシートでは、主鉄筋および側方鉄筋を含め、最大の鉄筋段数を 20 段としている。この制限を回避し鉄筋段数を増加させる場合には、以下の手順によればよい。

以下では、鉄筋段数を 20 段から 25 段に増加させる場合の手順について例示する。

- ① エクセルシートの 29 行から 30 行の間に、挿入行を 5 行追加する（コマンドの繰り返しには F4 キーが利用できる）。
- ② 修正 ci および鉄筋パラメータの 29 行目を 30 および 34 行までドラッグして、計算式を埋め込む。
- ③ 「鉄筋量の総和」および「鉄筋パラメータの総和」において、SUM 関数の最大範囲を 29 から 34 に変更する。
- ④ 「鉄筋応力 os」および「圧縮鉄筋応力 os'」のセルに使用している MAX および MIN 関数の最大範囲を F29 から F34 に変更する（それぞれ 2 箇所）。変更後、Ctrl+Shift+Enter キーを押す。埋め込んだ数式に中括弧 (()) が付ければよい。

エクセルシートの作成例を、表 5-1 に示す。

表 5-1 エクセルシートの作成例（試算例のケース 1）

曲げモーメント M(kNm)		2500.0		2500.0		ヤング係数比 n		15	
断面力	N(kN)	軸力	500.0	Yc(図心) (cm)	80	Yc(H/2) (cm)	80	Y(H/2) (cm)	80
断面諸元	断面高さ h(cm)	断面幅 b(cm)	160	Yc(H/2) (cm)	80	b(cm)	500.000	e	500.000
許容応力度	コンクリート $\sigma_{ca}(N/mm^2)$	鉄筋 $\sigma_{sa}(N/mm^2)$	8	δ (図心)	2.62500	δ (H/2)	2.62500	$nA_s(\kappa-c)/\delta$	$nA_s(\kappa-c)/\delta$
鉄筋諸元	段数	被り $as(cm)$	修正 $ci(cm)$	鉄筋量 $Asi(cm^2)$	鉄筋 ハラメータ	ρ_i	γ_i	$\rho_i \gamma_i$	$\rho_i \gamma_i (\gamma_i + \delta)$
1	10	70.664	10	70.664	706.64	0.0020944	0.0625	0.000184	0.0007913
2	24	70.664	24	70.664	1695.936	0.002944	0.15	0.000442	0.008171
3	52	12.848	52	12.848	668.056	0.0005335	0.325	0.000174	0.001579
4	80	12.848	80	12.848	102.784	0.0005335	0.5	0.000268	0.0006365
5	108	12.848	108	12.848	1387.584	0.0005335	0.675	0.000361	0.0011925
6	136	136	136	136	9610.304	0.0002944	0.85	0.0002503	0.010232
7	150	70.664	150	70.664	10539.6	0.0002944	0.9375	0.000276	0.010489
8		0		0	0	0	0	0	0
9		0		0	0	0	0	0	0
10		0		0	0	0	0	0	0
11		0		0	0	0	0	0	0
12		0		0	0	0	0	0	0
13		0		0	0	0	0	0	0
14		0		0	0	0	0	0	0
15		0		0	0	0	0	0	0
16		0		0	0	0	0	0	0
17		0		0	0	0	0	0	0
18		0		0	0	0	0	0	0
19		0		0	0	0	0	0	0
20		0		0	0	0	0	0	0
総和		321.2		25696	0.0133983			0.000692	0.041823
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	r
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
中立軸位置 (κ cm)		コンクリート応力 $\sigma_c(N/mm^2)$	鉄筋応力 $\sigma_s(N/mm^2)$	圧縮鉄筋応力 $\sigma_s'(N/mm^2)$	照査値 σ_c/σ_{ca}	照査値 σ_s/σ_{sa}	判定 (σ_c)	判定 (σ_s)	判定 (σ_s')
51.335	4.311	124.295	-52.072	0.539	0.777	OK	OK	OK	0.3208
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.3798
A		B	C	P	Q	判別式D	裏根の数 r_1	r_2	θ
7.8750	3.7641	-2.0513	-169078	2424377	-32.07864	3	-	-	13.379

6. 計算例

6.1 断面諸元と計算ケース

試算に用いた断面諸元を、表 6-1 に示す。また、主鉄筋および側方鉄筋の配置を、図 6-1 に示す。

表 6-1 断面諸元

項目	諸元値
断面高さ $h(cm)$	160
断面幅 $b(cm)$	150
コンクリート許容応力度 $\sigma_{ca}(N/mm^2)$	8
鉄筋許容応力度 $\sigma_{sa}(N/mm^2)$	160
主鉄筋	圧縮側、引張側とも D29・11 本・2 段
側方鉄筋	左右 1 列ずつ D29・3 段

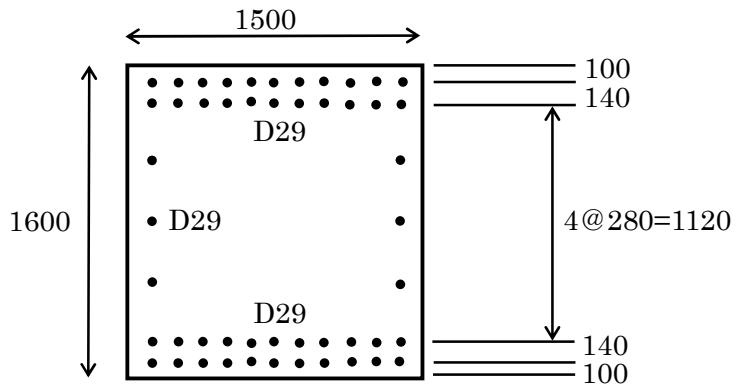


図 6-1 鉄筋の配置

計算ケースは、断面力を変更し、表 6-2 に示す 5 ケースとした。

表 6-2 計算ケース

ケース	曲げモーメント $M(kNm)$	軸力 $N(kN)$	備考
1	2500	500	正曲げ/圧縮軸力
2	-2000	300	負曲げ/圧縮軸力
3	2000	-500	正曲げ/引張軸力
4	1000	5000	全断面圧縮
5	200	-700	全断面引張

6.2 計算結果

表 6-3 に、本エクセル表計算による計算結果を示す。

検証のため、先に作成した「矩形・円形・T 形 RC 断面の曲げ応力算出マクロ」および市販ソフト（フォーラムエイト「ES」）を用いた計算を行い、表 6-4 および 5 に結果を示した。本エクセルの結果とマクロおよび市販ソフトの結果は、良い一致を示すことがわかる。

表 6-3 本エクセル表計算による計算結果

ケース	曲げモーメント M(kNm)	軸力 N(kNm)	中立軸位置 x(cm)	本エクセル表計算(A)		
				コン応力 $\sigma_c(N/mm^2)$	鉄筋応力 $\sigma_s(N/mm^2)$	圧縮鉄筋応力 $\sigma_{s'}(N/mm^2)$
1	2500.0	500.0	51.335	4.311	124.295	-52.072
2	-2000.0	300.0	50.073	3.425	102.513	-41.111
3	2000.0	-500.0	40.796	3.184	127.843	-36.052
4	1000.0	5000.0	198.915	2.902	-10.705	-41.345
5	200.0	-700.0	-45.950	-0.530	33.905	9.681

表 6-4 マクロによる計算結果

ケース	矩形&円形&T形曲げ応力マクロ(B)				比(A/B)			
	x (cm)	σ_c (N/mm ²)	σ_s (N/mm ²)	$\sigma_{s'}$ (N/mm ²)	比 (x)	比 (σ_c)	比 (σ_s)	比 ($\sigma_{s'}$)
1	51.335	4.311	124.295	-52.072	1.000	1.000	1.000	1.000
2	50.074	3.425	102.513	-41.111	1.000	1.000	1.000	1.000
3	40.796	3.184	127.843	-36.052	1.000	1.000	1.000	1.000
4	198.915	2.902	-10.705	-41.345	1.000	1.000	1.000	1.000
5	-45.950		33.905	9.681	1.000		1.000	1.000

表 6-5 市販ソフトによる計算結果

ケース	市販ソフト(C)				比(A/C)			
	x (cm)	σ_c (N/mm ²)	σ_s (N/mm ²)	$\sigma_{s'}$ (N/mm ²)	比 (x)	比 (σ_c)	比 (σ_s)	比 ($\sigma_{s'}$)
1	51.3	4.311	124.295	-52.072	1.001	1.000	1.000	1.000
2	50.1	3.425	102.513	-41.111	0.999	1.000	1.000	1.000
3	40.8	3.184	127.843	-36.052	1.000	1.000	1.000	1.000
4	198.9	2.902	0.000	-41.345	1.000	1.000		1.000
5	-45.9	0.000	33.905	0.000	1.001		1.000	

7. マクロ併用版について

本エクセルでは、マクロを使用せず、表計算機能によって中立軸位置や応力度の算出を実施したが、1断面のデータに対し1個のワークシートを必要とするので、多数の断面を処理する際にはシート作成に手間がかかるという不便が生じる。

そこで、断面力や断面諸元の入力処理および応力度や照査値の出力処理にはマクロを使用し、応力度計算にはエクセルのワークシート「中立軸および応力計算」を利用するマクロ併用版を作成した。

以下に、具体的データ入力方法と出力形式について記載する。

- ・ワークシート「断面力」

複数ケースに対する断面力を入力するワークシートである。入力項目は、データ番号、データの説明、曲げモーメント(kNm)、軸力(kN)および断面諸元番号である。断面諸元番号は、各ケースに適用する断面諸元データを指定する番号を入力する。ワークシート「断面諸元」で入力される断面諸元番号に対応するデータを選択する。この断面諸元番号は、文字データを含んでいてもよい。

なお、データ番号が空欄になった時点で、データの読み込みを終了する。

- ・ワークシート「断面諸元」

複数の断面諸元データを入力するワークシートである。入力項目は、通し番号、断面諸元番号、断面高(cm)、断面幅(cm)、コンクリート許容応力度(N/mm²)、鉄筋許容応力度(N/mm²)、鉄筋被り(cm)および鉄筋量(cm²)である。ここに、鉄筋被りはコンクリート圧縮縁から鉄筋中心までの距離である。また、圧縮側の最外鉄筋から順次入力する必要がある。

鉄筋被りおよび鉄筋量のデータは複数の入力が可能であり、鉄筋被りのデータが空欄になった時点でデータの読み込みを終了する。

通し番号が空欄となった時点で、断面諸元データの読み込みを終了する。

- ・ワークシート「照査結果」

応力度や照査値を出力するワークシートである。出力項目は、ケース番号、ケースの説明、断面諸元番号、曲げモーメント(kNm)、軸力(kN)、中立軸位置(cm)、コンクリート応力度 σ_c (N/mm²)、引張鉄筋応力度 σ_s (N/mm²)、圧縮鉄筋応力度 σ'_s (N/mm²)、コンクリート許容応力度 σ_{ca} (N/mm²)、鉄筋許容応力度 σ_{sa} (N/mm²)、コンクリート照査値 σ_c / σ_{ca} 、鉄筋照査値 σ_s / σ_{sa} 、コンクリート判定および鉄筋判定である。

- ・ワークシート「中立軸および応力計算」

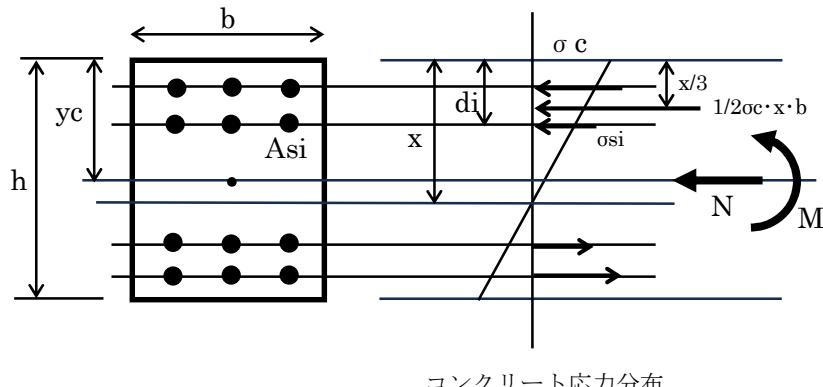
中立軸位置や発生応力度をエクセル表計算によって算出するワークシートである。本ワークシートは、ワークシート「断面力」で設定した複数のケースに対し、マクロ内において応力計算のソルバーとして繰り返し使用される。

参考資料 釣合式を用いた多段配筋矩形断面の中立軸算定式の導出

先に、軸力が作用し、かつ中立軸が断面内にある場合の中立軸位置算定に関しては、断面1次モーメント、断面2次モーメントおよび軸力偏心距離で表される中立軸算定式(10)を導入し、矩形断面条件を考慮することで中立軸位置に関する3次方程式(19)を提示した。

以下では、式(10)を介さず、断面内応力と作用断面力との釣合式から、中立軸算定式の導出を行う。

参図1に、断面仮定を示す。



コンクリート応力分布

【記号】

h : 部材高

y_c : 圧縮縁から軸力作用位置までの距離 (通例 $y_c=h/2$)

b : 部材幅

σ_c : 圧縮縁でのコンクリート応力

d_i : 第*i*段鉄筋の圧縮縁からの芯かぶり

σ_{si} : 第*i*段鉄筋の応力 (圧縮正)

A_{si} : 第*i*段鉄筋の鉄筋断面積

x : 圧縮縁から中立軸までの距離

N : 軸力 (圧縮正)

M : 曲げモーメント (下縁側引張正)

n : ヤング係数比 (通例 $n=15$)

参図1 断面仮定

応力分布の直線性より、コンクリート応力 σ_c と鉄筋応力 σ_{si} の間には、以下の関係が成立する。ここに、鉄筋とコンクリートのひずみは同一と仮定し、鉄筋位置のコンクリート応力が σ_{si}/n で表されることを考慮した。

$$\frac{\sigma_c}{x} = \frac{\sigma_{si}/n}{x-d_i} \quad (a1)$$

すなわち、

$$\sigma_{si} = \frac{x-d_i}{x} n \sigma_c \quad (a2)$$

ここに、 $\sigma c > 0$ のとき、 $di < x$ のとき $\sigma si > 0$ となり、 $di > x$ のとき $\sigma si < 0$ となることがわかる。すなわち、圧縮域の鉄筋応力が正、引張域の鉄筋応力が負となっている。

以下では、水平方向の力の釣合式とモーメントの釣合式を用い、未知数 σc と x に関する連立方程式を導入し、両式から σc を消去することにより、 x に関する中立軸算定式を求める。

軸力 N と断面内直応力との釣り合いにより、次式が成立する。

$$N = \frac{1}{2} \sigma_c x b + \sum \sigma_{si} A_{si} \quad (a3)$$

ここに、式(a3)は、圧縮および引張鉄筋のいずれに対しても成立する。

式(a2)を式(a3)に代入すれば、

$$N = \frac{1}{2} \sigma_c x b + \sum \frac{x - d_i}{x} n \sigma_c A_{si} \quad (a4)$$

すなわち、

$$Nx = \sigma_c \left(\frac{1}{2} bx^2 + nx \sum A_{si} - n \sum A_{si} d_i \right) \quad (a5)$$

中立軸周りのモーメントの釣り合いにより、次式が成立する。

$$M + N(x - y_c) = \frac{1}{2} \sigma_c x b \frac{2}{3} x + \sum \sigma_{si} A_{si} (x - d_i) \quad (a6)$$

ここに、式(a6)は、圧縮および引張鉄筋のいずれに対しても成立する。

式(a2)を式(a6)に代入すれば、

$$M + N(x - y_c) = \frac{1}{3} \sigma_c bx^2 + \sum \frac{(x - d_i)^2}{x} n \sigma_c A_{si} \quad (a7)$$

すなわち、

$$Mx + Nx(x - y_c) = \sigma_c \left(\frac{1}{3} bx^3 + nx^2 \sum A_{si} - 2nx \sum A_{si} d_i + n \sum A_{si} d_i^2 \right) \quad (a8)$$

式(a8)および式(a5)を用い、両辺を割算すれば（式(a8)÷式(a5)を実施）、

$$\frac{M+N(x-y_c)}{N} = \frac{\frac{1}{3}bx^3 + nx^2 \sum A_{si} - 2nx \sum A_{si} d_i + n \sum A_{si} d_i^2}{\frac{1}{2}bx^2 + n \sum A_{si} - n \sum A_{si} d_i} \quad (a9)$$

すなわち、

$$(e + x - y_c) \left(\frac{1}{3} bx^2 + nx \sum A_{si} - n \sum A_{si} d_i \right) = \frac{1}{3} bx^3 + nx^2 \sum A_{si} - 2nx \sum A_{si} d_i + n \sum A_{si} d_i^2 \quad (a10)$$

ここに、 $e=M/N$ である。

式(a10)を展開し、 x に関して整理すれば、次式を得る。

$$bx^3 + 3bx^2(e - y_c) + 6nx\{\sum A_{si}d_i + (e - y_c)\sum A_{si}\} - 6n\{(e - y_c)\sum A_{si}d_i + \sum A_{si}d_i^2\} \quad (a11)$$

式(a11)により、中立軸位置 x を求める 3 次方程式が得られたが、無次元パラメータによる表示を行うため、両辺に $1/(bh^3)$ を乗じる。

$$\left(\frac{x}{h}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{h}\right)^2 \frac{e - y_c}{h} + 6n \frac{x}{h} \left(\sum \frac{A_{si}}{bh} \frac{d_i}{h} + \frac{e - y_c}{h} \sum \frac{A_{si}}{bh} \right) - 6n \left\{ \frac{e - y_c}{h} \sum \frac{A_{si}}{bh} \frac{d_i}{h} + \sum \frac{A_{si}}{bh} \left(\frac{d_i}{h} \right)^2 \right\} = 0 \quad (a12)$$

ここで、以下の無次元パラメータを定義する。

$$k = \frac{x}{h} \quad (\text{中立軸比})$$

$$\delta = \frac{e - y_c}{h} \quad (\text{圧縮縁から偏心軸力位置までの距離の部材高に対する比})$$

$$p_i = \frac{A_{si}}{bh} \quad (\text{第 } i \text{ 段鉄筋の鉄筋比})$$

$$\gamma_i = \frac{d_i}{h} \quad (\text{第 } i \text{ 段鉄筋被りの部材高に対する比})$$

このとき、式(a12)は、以下となる。

$$k^3 + 3\delta k^2 + 6nk \sum p_i(\gamma_i + \delta) - 6n \sum p_i \gamma_i (\gamma_i + \delta) = 0 \quad (\text{a13})$$

式(a13)が無次元パラメータで表示した多段配筋矩形断面に対する中立軸算定式になる。式(a13)は、先に提示した式(19)に一致することがわかる。

【参考文献】

- (1)日本建築学会：鉄筋コンクリート構造計算規準・同解説 2018年12月
- (2)土木学会：コンクリート標準示書解説・参考篇（1936年発行）
- (3)吉川弘道、富山潤（2024）：鉄筋コンクリートの設計 第2版、p129、丸善出版
- (4)吉田耕作、雨宮綾夫、伊藤清、加藤敏夫、松島與三、古谷茂（1975）：応用数学便覧、p14、丸善