

## 2.2 地盤変位波長の算定法

線状地中構造物縦断方向の軸応力に影響を与えると考えられる表面波においては、波動の分散性が生じるが、このような性質の波動では群速度が極小になる周期で振幅が大きくなるということが理論的に示されている [14]。また、1989 年ロマプリータ地震の際に観測された表面波の分析から、地震動の卓越周期と理論的に求められた群速度極小周期とが良い一致を示すことも指摘されている [15]。

本論文ではこのような背景を踏まえ、2層系弾性地盤のラブ波に対する群速度極小時の波長を解析的に求める算定法を提案するとともに、現状の設計指針で多用されている調和平均法により得られる波長との比較検討を実施した。

### (1) 波長算定式の誘導

#### (a) 位相速度に対する群速度極小時の条件

群速度  $U$  の定義は、式 (2.2.1) で表される [16]。

$$U = \frac{d\omega}{dk} \quad (2.2.1)$$

ここに、 $\omega$  : 円振動数、 $k$  : 波数であり、それぞれ式 (2.2.2) および (2.2.3) で表される。

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.2.2)$$

$$k = \frac{2\pi}{L} = \frac{2\pi}{cT} \quad (2.2.3)$$

ここに、 $T$  : 周期、 $L$  : 波長、 $c$  : 位相速度である。

式(2.2.1)~(2.2.3)より、群速度  $U$  と位相速度  $c$  との関係として式 (2.2.4) が得られる。

$$U = \frac{c}{1 + \frac{T}{c} \cdot \frac{dc}{dT}} \quad (2.2.4)$$

表面波の群速度が極小値を有する条件は、式 (2.2.5) で表される。

$$\frac{dU}{dT} = 0 \quad (2.2.5)$$

また、式 (2.2.4) を用い  $dU/dT$  を求めると、式 (2.2.6) を得る。

$$\frac{dU}{dT} = \frac{T \left\{ \frac{2}{c} \left( \frac{dc}{dT} \right)^2 - \frac{d^2c}{dT^2} \right\}}{\left( 1 + \frac{T}{c} \cdot \frac{dc}{dT} \right)^2} \quad (2.2.6)$$

式 (2.2.5) および (2.2.6) より、位相速度に対する群速度極小時の条件として式 (2.2.7) が得られる。

$$\frac{d^2c}{dT^2} = \frac{2}{c} \left( \frac{dc}{dT} \right)^2 \quad (2.2.7)$$

(b) 群速度極小時のラブ波の波長

2層系地盤のラブ波の特性方程式 (位相速度の分散曲線) は、式 (2.2.8) で表される [17]。

$$\tan\left(\frac{2\pi H}{Tc} \cdot p\right) = \alpha \frac{q}{p} \quad (2.2.8)$$

ここに、 $\alpha$ 、 $p$  および  $q$  は式 (2.2.9) で定義される。また、 $H$  : 表層厚、 $G_1, G_2$  : それぞれ表層および基盤層のせん断弾性係数および  $V_{S1}, V_{S2}$  : それぞれ表層および基盤層のせん断波速度である。

$$\alpha = \frac{G_2}{G_1} \quad (2.2.9a)$$

$$p = \sqrt{\left(\frac{c}{V_{S1}}\right)^2 - 1} \quad (2.2.9b)$$

$$q = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{V_{S2}}\right)^2} \quad (2.2.9c)$$

式 (2.2.8) を用いて  $dc/dT$  を求めると、式(2.2.10)が得られる。

$$\frac{dc}{dT} = \frac{p^3 q x}{p q x + \alpha(p^2 + q^2) \cos^2 x} \cdot \frac{c}{T} \quad (2.2.10a)$$

$$x = \frac{2\pi H p}{T c} \quad (2.2.10b)$$

さらに、 $d^2c/dT^2$  を求めると、式 (2.2.11) が得られる。

$$\frac{d^2c}{dT^2} = \frac{p^3 c x \{ p^2 q^3 (1 + 3p^2) x^2 + \alpha p (p^2 + q^2) (q^2 - p^2 + 3p^2 q^2) x \cos^2 x - 2\alpha^2 q (p^2 + q^2)^2 \cos^2 x (\cos^2 x + x \sin x \cos x) \}}{\{ p q x + \alpha (p^2 + q^2) \cos^2 x \}^3 T^2} \quad (2.2.11)$$

式 (2.2.7)、(2.2.10) および (2.2.11) から、式 (2.2.12) が得られる。

$$p^2q^3(1+p^2)x^2 + \alpha p(p^2+q^2)(q^2-p^2+p^2q^2)x\cos^2x - 2\alpha^2q(p^2+q^2)\cos^2x(\cos^2x+x\sin x\cos x)=0 \quad (2.2.12)$$

また、式 (2.2.9b)、(2.2.9c) および (2.2.10b) を用いて、式 (2.2.13) が得られる。

$$p = \alpha \sqrt{\frac{\beta^2 - 1}{\alpha^2 \cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x}} \cos x \quad (2.2.13a)$$

$$q = \sqrt{\frac{\beta^2 - 1}{\alpha^2 \cos^2 x + \beta^2 \sin^2 x}} \sin x \quad (2.2.13b)$$

$$\beta = \frac{V_{S2}}{V_{S1}} \quad (\text{S波速度比}) \quad (2.2.13c)$$

式 (2.2.12) および (2.2.13) から、ラブ波の群速度が極小となるためのパラメータ  $x$  に関する条件として、式 (2.2.14) が得られる。

$$x^2 \tan^3 x (\tan^2 x + 1)^2 + x (\tan^2 x + 1) (\tan^2 x - \gamma^2 \beta^3) (\tan^2 x + \gamma^2 \beta^3) - 2 \tan x (x \tan x + 1) (\tan^2 x + \gamma^2 \beta^4) (\tan^2 x + \gamma^2 \beta^2) = 0 \quad (2.2.14a)$$

$$\gamma = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (\text{密度比}) \quad (2.2.14b)$$

ここに、 $\rho_1, \rho_2$  : それぞれ表層および基盤層の密度である。

群速度極小時の波長および周期は、式 (2.2.15) で表される。

$$\frac{L}{H} = \frac{2\pi\gamma\beta}{x} \sqrt{\frac{\beta^2 - 1}{\gamma^2\beta^2 + \tan^2 x}} \quad (2.2.15a)$$

$$\frac{T}{4H} = \frac{\pi\gamma\beta}{2x} \sqrt{\frac{\beta^2 - 1}{\gamma^2\beta^4 + \tan^2 x}} \quad (2.2.15b)$$

(c) 調和平均法による波長

2層系地盤における表層および基盤層のせん断波の波長は、式 (2.2.16) で表される。

$$L_1 = V_{S1} T_n \quad (2.2.16a)$$

$$L_2 = V_{S2} T_n \quad (2.2.16b)$$

$$T_n = \frac{4H}{V_{S1}} \cdot \frac{1}{2n-1} \quad (2.2.16c)$$

ここに、 $T_n$  :  $n$  次のせん断変形モードの周期である。

したがって、表層および基盤層それぞれの波長の調和平均値で得られる波長は、式(2.2.17)で表される。

$$L = \frac{2L_1L_2}{L_1+L_2} = \frac{8\beta}{1+\beta} \frac{1}{2n-1} H \quad (2.2.17)$$

式(2.2.17)より調和平均法で得られる波長が式(2.2.18)で表される。

$$\frac{L}{H} = \frac{8\beta}{1+\beta} \cdot \frac{1}{2n-1} \quad (n=1,2,\dots) \quad (2.2.18)$$

## (2) 数値計算例

### (a) 計算手順

上述した波長の算定法を用い、群速度極小時の波長を算定する手順を説明する。

- (1) 表層に対する基盤の密度比  $\gamma$  と表層に対する基盤の S 波速度比  $\beta$  の値を設定する。
- (2) ある  $x$  の値を仮定する。この値はラブ波の基本モードに対して  $0 \sim \pi/2$  の間に、1 次高次モードに対して  $\pi \sim 3\pi/2$  の間に存在する。
- (3) (2)で仮定した  $x$  に対して、式(2.2.14a)の左辺の値を計算する。その値の符号に応じ、新しい  $x$  の値が仮定される。以上の手順を式(2.2.14a)の左辺の値がほぼ 0 になるまで繰り返す。
- (4) (3)の繰り返し計算で得られる  $x$  を用い、式(2.2.15)により波長  $L$  と周期  $T$  を求める。

波長算定式と上記計算手順の検証のため、既往文献〔18〕(以下本項目では同文献と呼ぶ)に示される結果との比較を実施した。同文献によれば、 $\gamma (= \rho_2/\rho_1) = 1.092$ 、 $\beta (= V_{S2}/V_{S1}) = 1.282$  の場合に対する位相速度と群速度の分散曲線が示されている。同文献の条件とは若干異なるが、 $\gamma = 1.1$  および  $\beta = 1.3$  の条件で上記手順により群速度極小時の波長と周期を算定すれば、式(2.2.19)が得られる。

$$\frac{L}{H} = 2.06993 \quad \frac{T}{(4H/V_{S1})} = 0.48088 \quad (2.2.19)$$

式(2.2.19)より、式(2.2.20)を得る。

$$\frac{c}{V_{S1}} = 1.08 \quad \frac{V_{S1}T}{H} = 1.95 \quad (2.2.20)$$

図-2.2.1 に示すように、本論文の提案法による結果が同文献の結果と良い一致を示しており、波長算定式と計算手順が妥当であることがわかる。

#### (b) 波長の算定結果

ラブ波の基本モードおよび高次モードに対し、密度比 ( $\rho_2/\rho_1$ ) をパラメータとしたときの無次元波長 ( $L/H$ ) と S 波速度比 ( $V_{S2}/V_{S1}$ ) の関係を、(a)~(c)に示す。同図には、調和平均法による波長の算定結果も併せて示されている。

図-2.2.2 によれば、本論文の方法で得られた波長と調和平均法で得られた波長において、S 波速度比が大きくなるほど（表層に対して基盤の剛性が大きくなるほど）増加する傾向に一致が見られ、さらに S 波速度比 3.0 付近で両者の値がほぼ一致することもわかる。しかしながら、S 波速度比が小さくなると、本論文の方法の結果が調和平均法による結果よりも小さい値を示している。これは、同一の変位振幅値に対し、調和平均法が本論文の方法よりも小さい地盤ひずみを与えることを示唆するものであるが、調和平均法の設計上の評価値としての妥当性は、変位振幅と波長の両者により議論する必要がある。

さらに、高次モードに関しても、本論文の方法と調和平均法の結果が基本モードの場合と同様の傾向を示すことがわかる。ただし、両者の方法で一致を示す波長は、基本モードと高次モードで異なっている。

次に、ラブ波の基本モードに対する群速度極小を与える無次元周期( $T/(4H/V_{S1})$ )と S 波速度比の関係を図-2.2.3 に示す。図-2.2.3 は密度比  $\gamma = 1.1$  の場合である。図-2.2.3 によれば、群速度極小を与える周期が、S 波速度比が大きくなるほど増加する傾向を示している。また、S 波速度比が極めて大きくなると、群速度極小を与える無次元周期は 1.0 に漸近し、群速度極小時の周期がせん断 1 次モードの固有周期に近づくことがわかる。

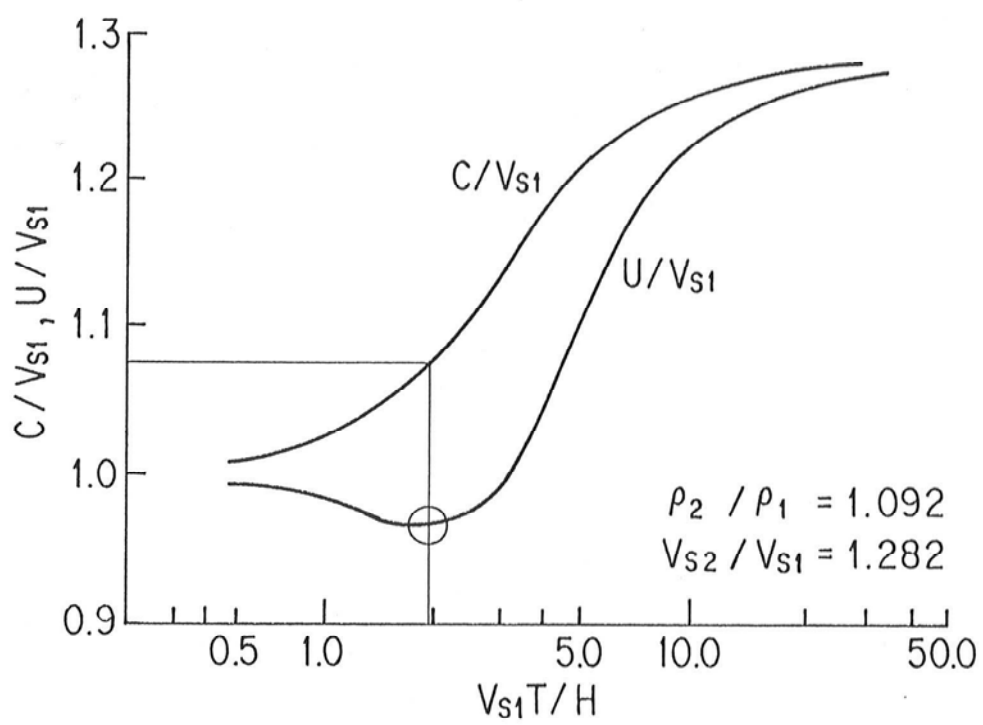
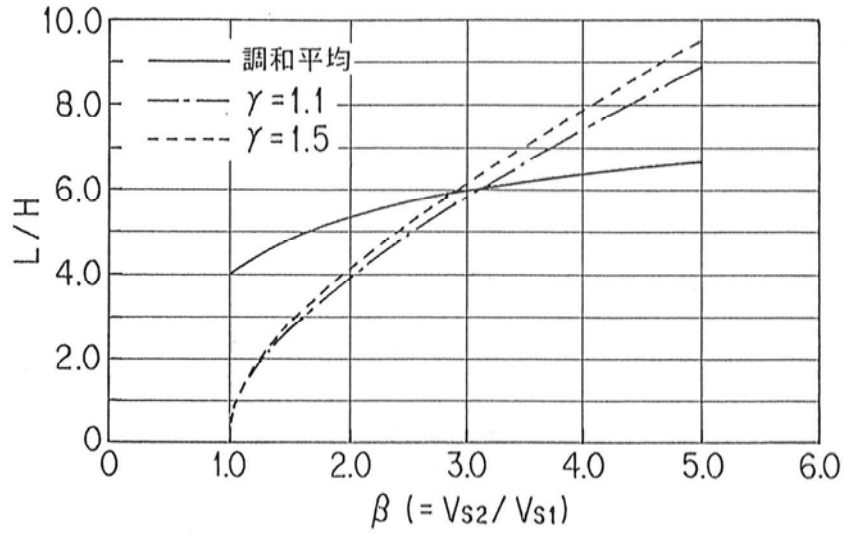
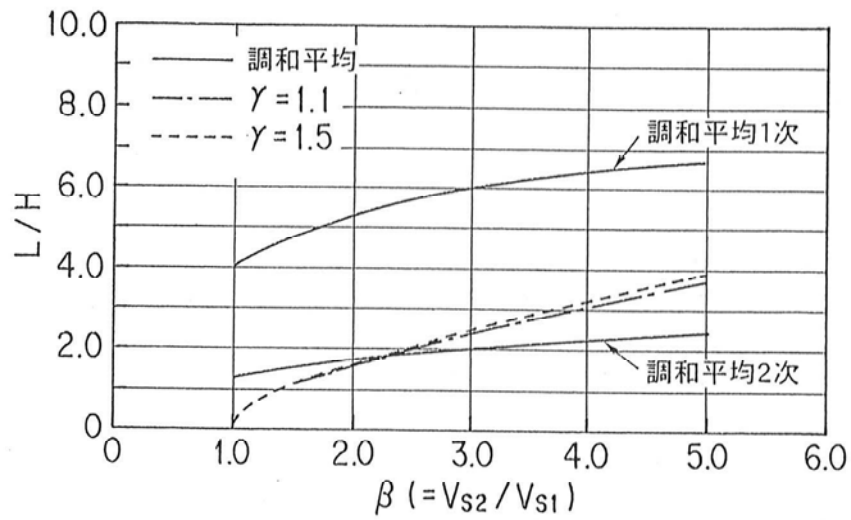


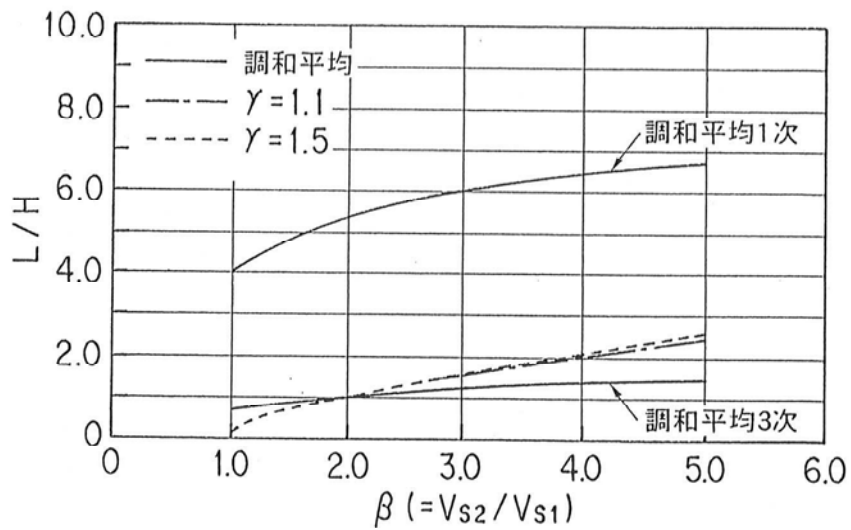
図-2.2.1 波長算定式の検証（既往文献〔18〕との比較）



(a) 基本モード



(b) 一次高次モード



(c) 二次高次モード

図-2.2.2 群速度極小時波長とせん断波速度比の関係

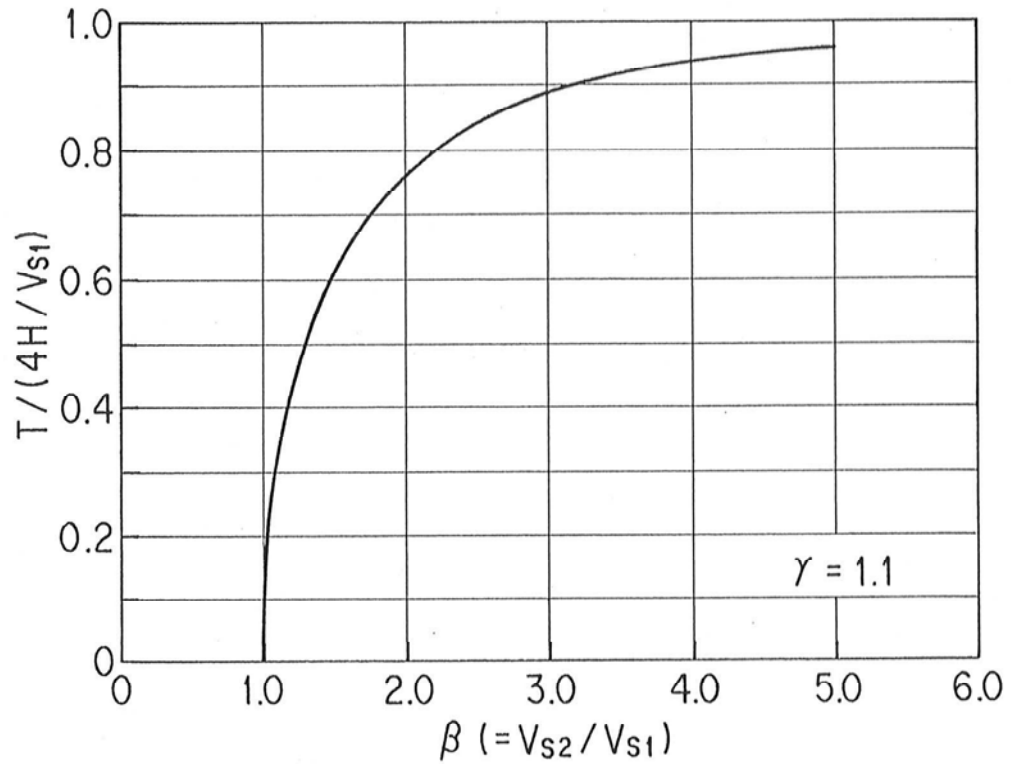


図-2.2.3 群速度極小時周期とせん断波速度との関係



## 第2章 参考文献

- [1] S. Okamoto, C. Tamura, K.Kato (1970): Earthquake Response of Fill Type Dam, Proc. Of 3rd Japan Earthquake Engineering Symposium, pp. 461-468
- [2] 岡本舜三 (1971): 耐震工学、オーム社
- [3] 松村孫治 (1934): 震動による土堰堤の変形、土木試験所報告、第28号
- [4] 土木学会編 (1973): 地震応答解析と実例、pp.263-265
- [5] F.I. Makdisi & H.B. Seed (1979): Simplified Procedure for Evaluating Embankment Response, J. Geotech. Engrg. Div., ASCE, 105 (12), 1427-1434
- [6] A.K. Chugh (1985): Dynamic Response Analysis of Embankment Dams, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 9, 104-124
- [7] P.B. Schnabel, J.Lysmer & H.B. Seed (1972): SHAKE-a Computer Program for Earthquake Response Analysis of Horizontally Layered Sites, EERC Report No. 72-12
- [8] 例えば、足立紀尚、龍岡文夫 (1981): 土木学会編新体系土木工学 18 土の力学(Ⅲ)－圧密・せん断・動的解析、技報堂出版
- [9] 寺澤寛一 (1977): 自然科学者のための数学概論、pp.492-493、岩波書店
- [10] 土岐憲三 (1981): 構造物の耐震解析、技報堂出版
- [11] 大町達夫 (1981): フィルダム振動の地下逸散減衰量の算定、土木学会第36回年次学術講演会講演概要集第I部門
- [12] T. Sato, T. Shibata & Y. Sunasaka (1985): Simplified Dynamic Analysis of Embankments, Proc. 5th Inter. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics, Vol.3
- [13] 佐藤泰夫 (1978): 弾性波動論、pp.103-108、岩波書店
- [14] 同上、pp.243-251
- [15] 小川好 (1993): ロマプリータ地震で観測された表面波の特性、平成5年東京都土木技術研究所年報、pp.267-274
- [16] 佐藤泰夫 (1978): 弾性波動論、pp.228-231
- [17] 佐藤泰夫 (1978): 弾性波動論、pp.66-72
- [18] 力武常次、佐藤良輔、萩原幸男 (1980): 物理数学Ⅱ、学会出版センター