

設計で用いる土圧理論の概説(その1)

— ランキン土圧とクーロン土圧 —

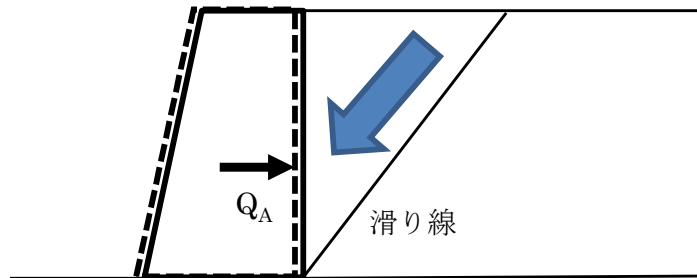
日中構造研究所 松原勝己

設計で用いる土圧(擁壁への土圧)(1)

- 静止土圧: 擁壁が**静止**しているときの土圧
→ 耐震解析時の**初期土圧**
- 主動土圧: 擁壁が**地盤から遠ざかる方向に移動**するときの**塑性平衡状態**における土圧
→ 擁壁や壁体の常時設計時あるいは地震時設計時の**作用土圧**
- 受働土圧: 擁壁が**地盤に近づく方向に移動**するときの**塑性平衡状態**における土圧
→ 擁壁や壁体の常時設計時あるいは地震時設計時の**抵抗土圧**

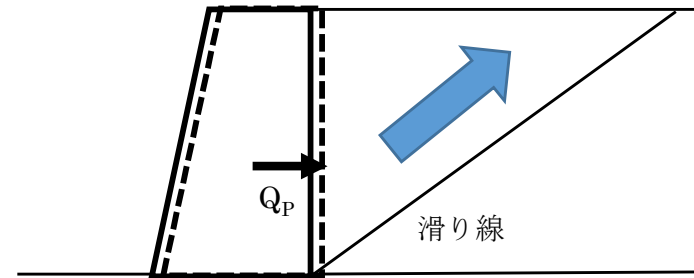
設計で用いる土圧(擁壁への土圧)(2)

擁壁が盛土の反対側へ動き、土塊が滑り落ちようとする

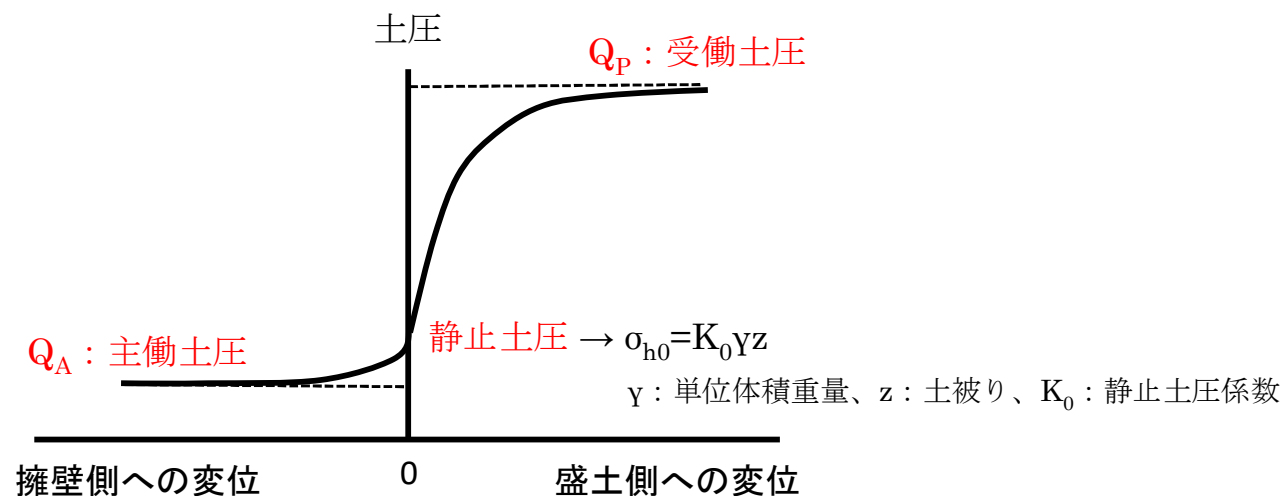


主働状態 Q_A : 主働土圧

擁壁が盛土側へ動き、土塊が滑り上がろうとする



受働状態 Q_P : 受働土圧

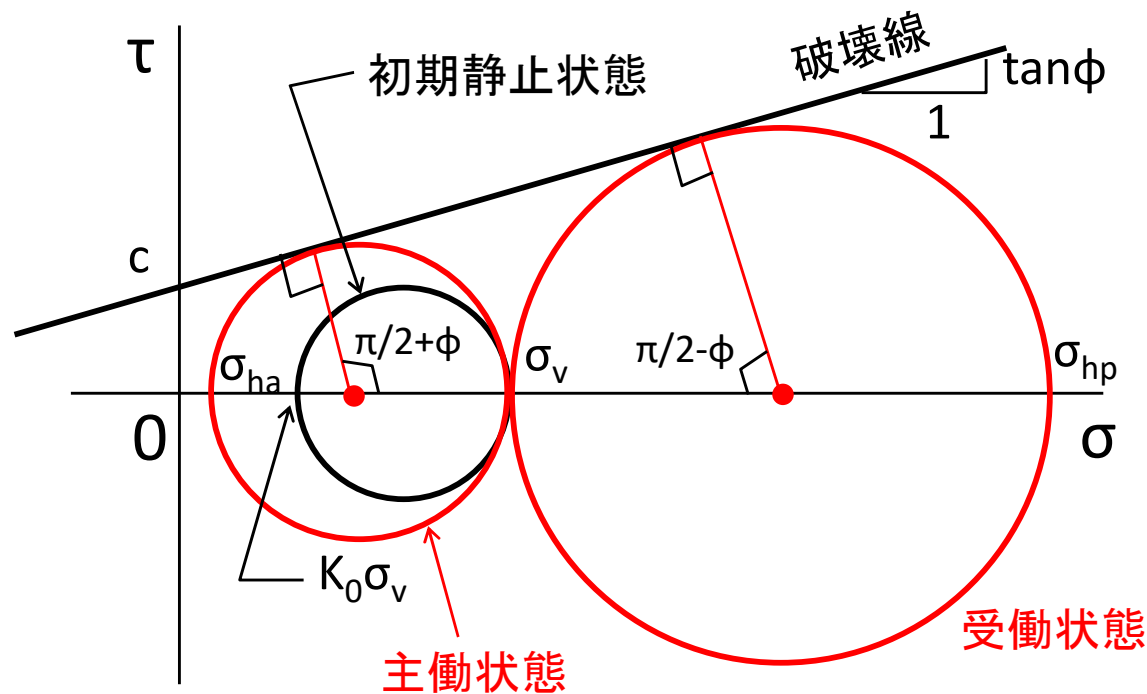


Rankine(ランキン)土圧(1)

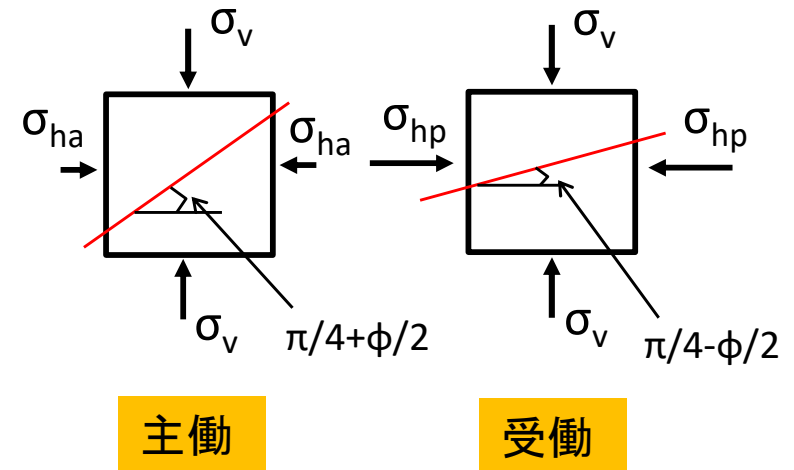
●前提条件

- ・盛土内の同一深度における応力状態は同じ
- ・盛土はモール・クーロン(c-φ)材料と仮定し、塑性平衡(破壊)状態にある
- ・壁体は鉛直かつ摩擦は無い
- ・盛土表面の傾斜は無い

●主働および受働時の応力状態



σ_v : 鉛直応力(=γz)
 σ_{ha} : 主働時水平応力
 σ_{hp} : 受働時水平応力



Rankine (ランキン) 土圧 (2)

● 主働土圧 (応力) σ_{ha}

$$\sigma_V - \sigma_{ha} = 2 \times \left(\frac{c}{\tan \phi} + \frac{\sigma_V + \sigma_{ha}}{2} \right) \times \sin \phi$$

σ_{ha} に関して解けば、次式を得る。

$$\sigma_{ha} = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \sigma_V - 2c \frac{\cos \phi}{1 + \sin \phi}$$

ここで、 $K_A = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi}$ と置けば、(K_A : 主働土圧係数)

$$\sigma_{ha} = K_A \sigma_V - 2c \sqrt{K_A}$$

$$K_A = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right)$$

$$\sigma_V = \gamma z$$

ϕ : 内部摩擦角、 c : 粘着力、 γ : 単位体積重量、 z : 土被り厚さ

Rankine (ランキン) 土圧 (3)

● 受働土圧 (応力) σ_{hp}

$$\sigma_{hp} - \sigma_V = 2 \times \left(\frac{c}{\tan \phi} + \frac{\sigma_V + \sigma_{hp}}{2} \right) \times \sin \phi$$

σ_{hp} に関して解けば、次式を得る。

$$\sigma_{hp} = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \sigma_V + 2c \frac{\cos \phi}{1 - \sin \phi}$$

ここで、 $K_P = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}$ と置けば、(K_P : 受働土圧係数)

$$\sigma_{hp} = K_P \sigma_V + 2c \sqrt{K_P}$$

$$K_P = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right)$$

$$\sigma_V = \gamma z$$

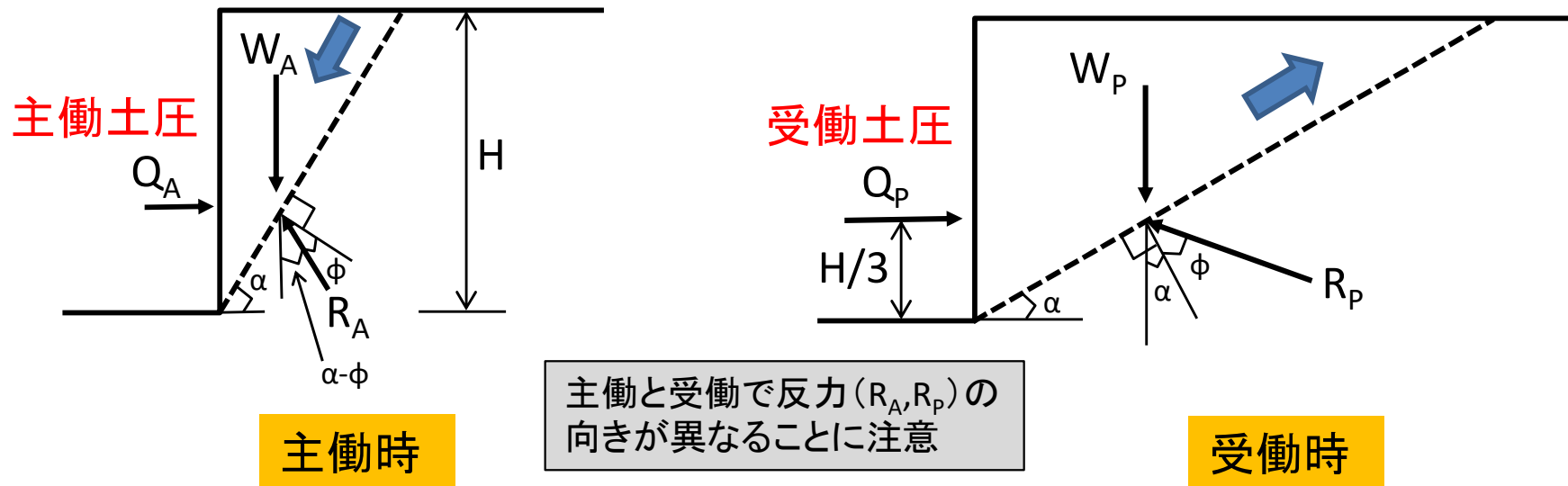
ϕ : 内部摩擦角、 c : 粘着力、 γ : 単位体積重量、 z : 土被り厚さ

Coulomb(クーロン)土圧(単純な条件)(1)

●前提条件

- ・壁体は鉛直かつ摩擦は無く、盛土表面の傾斜は無い(単純な条件)
- ・盛土の粘着力は無い
- ・楔状の土塊が滑り出す時点での壁体の反力を土圧として求める
- ・滑り面は直線と仮定する

●主働および受働時の力の釣り合い(龍岡(2010)による)



Coulomb (クーロン) 土圧 (単純な条件) (2)

● 主働土圧 Q_A

水平方向の力の釣り合い: $Q_A^* = R_A \sin(\alpha - \phi)$

鉛直方向の力の釣り合い: $W_A = R_A \cos(\alpha - \phi)$

R_A を消去すれば、次式を得る。 $Q_A^* = W_A \tan(\alpha - \phi)$

土塊の重量: $W_A = H \times \frac{H}{\tan \alpha} \times \frac{1}{2} \times \gamma = \frac{1}{2} \gamma H^2 \frac{1}{\tan \alpha}$

代入

以上より、主働土圧 Q_A^* は、次式で表される。

$$Q_A^* = \frac{1}{2} \gamma H^2 K$$

$$K = \frac{\tan(\alpha - \phi)}{\tan \alpha} \quad : \text{土圧係数}$$

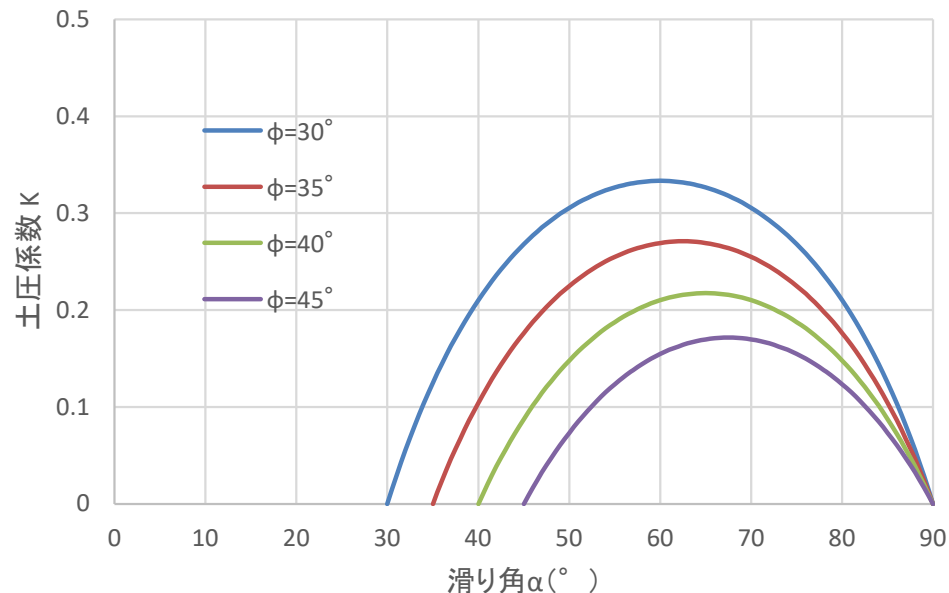
滑り角 α が未定

Coulomb(クーロン)土圧(単純な条件)(3)

●主働土圧 Q_A

土圧係数 K と滑り角 α の関係をプロットすると、 K が極大値を持つ α が存在する。静止土圧から主働土圧へと土圧が減少してゆくと、 K の極大値における一つの滑り角にて滑り破壊が生じることになる。それ以上に土圧が減少すれば、他の滑り角でも破壊が生じる。

したがって、 K の極大値を主働土圧係数 K_A と考えることができる。



$$K = \frac{\tan(\alpha - \phi)}{\tan \alpha}$$

K : 土圧係数
 ϕ : 内部摩擦角
 α : 滑り角

Coulomb (クーロン) 土圧 (単純な条件) (4)

● 主働土圧 Q_A

K の極大値を、 $\frac{\partial K}{\partial \alpha} = 0$ の条件により求める。

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha} = \frac{\frac{\tan \alpha}{\cos^2(\alpha - \phi)} - \frac{\tan(\alpha - \phi)}{\cos^2 \alpha}}{\tan^2 \alpha} = \frac{\cos(2\alpha - \phi) \sin \phi}{\sin^2 \alpha \cos^2(\alpha - \phi)}$$

$2\alpha - \phi = \frac{\pi}{2}$ より $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$: 主働時の滑り角

したがって、 $K_A = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} - \phi\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)} = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)} = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)$

すなわち、

$$Q_A = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_A : \text{主働土圧}$$

$$K_A = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) : \text{主働土圧係数}$$

Coulomb (クーロン) 土圧 (単純な条件) (5)

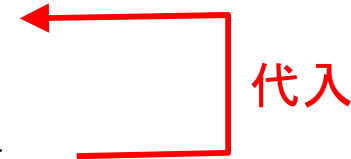
● 受働土圧 Q_p

水平方向の力の釣り合い: $Q_p^* = R_p \sin(\alpha + \phi)$

鉛直方向の力の釣り合い: $W_p = R_p \cos(\alpha + \phi)$

R_p を消去すれば、次式を得る。 $Q_p^* = W_p \tan(\alpha + \phi)$

土塊の重量: $W_p = H \times \frac{H}{\tan \alpha} \times \frac{1}{2} \times \gamma = \frac{1}{2} \gamma H^2 \frac{1}{\tan \alpha}$



以上より、受働土圧 Q_p^* は、次式で表される。

$$Q_p^* = \frac{1}{2} \gamma H^2 K$$

$$K = \frac{\tan(\alpha + \phi)}{\tan \alpha} \quad : \text{土圧係数}$$

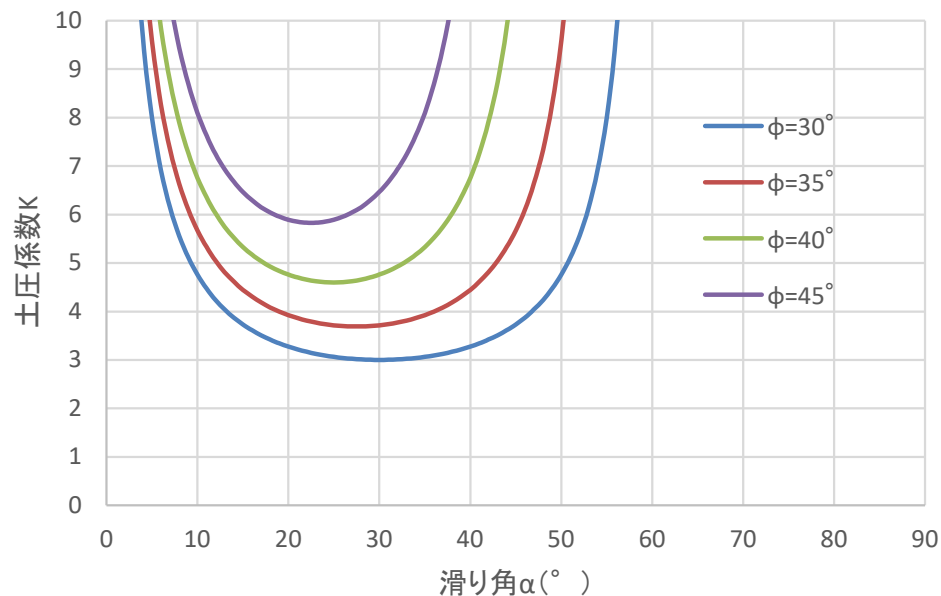
滑り角 α が未定

Coulomb(クーロン)土圧(単純な条件)(6)

● 受働土圧 Q_p

土圧係数 K と滑り角 α の関係をプロットすると、 K が極小値を持つ α が存在する。静止土圧から受働土圧へと土圧が増大してゆくと、 K の極小値における一つの滑り角にて滑り破壊が生じることになる。それ以上に土圧が増大すれば、他の滑り角でも破壊が生じる。

したがって、 K の極小値を受働土圧係数 K_p と考えることができる。



$$K = \frac{\tan(\alpha + \phi)}{\tan \alpha}$$

K : 土圧係数
 ϕ : 内部摩擦角
 α : 滑り角

Coulomb (クーロン) 土圧 (単純な条件) (7)

● 受働土圧 Q_p

K の極小値を、 $\frac{\partial K}{\partial \alpha} = 0$ の条件により求める。

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha} = \frac{\frac{\tan \alpha}{\cos^2(\alpha + \phi)} - \frac{\tan(\alpha + \phi)}{\cos^2 \alpha}}{\tan^2 \alpha} = \frac{-\cos(2\alpha + \phi) \sin \phi}{\sin^2 \alpha \cos^2(\alpha + \phi)}$$

$2\alpha + \phi = \frac{\pi}{2}$ より $\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$: 受働時の滑り角

したがって、 $K_p = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} + \phi\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)} = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)} = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$

すなわち、

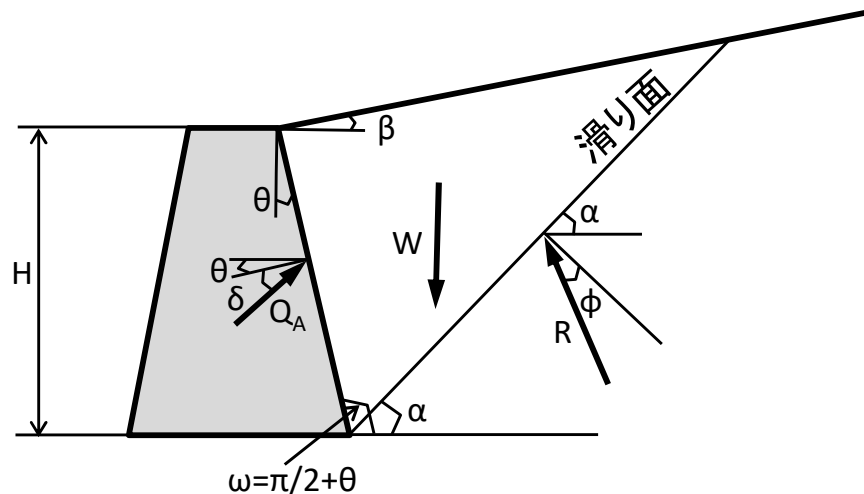
$$Q_p = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_p : \text{受働土圧}$$

$$K_p = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) : \text{受働土圧係数}$$

Coulomb主働土圧(一般的条件)(1)

●前提条件

- ・盛土表面の傾斜、壁体の傾斜、壁体の摩擦を考慮
- ・滑り面の直線仮定や盛土の粘着力無視は、同様の条件



- Q_A : 主働土圧
- W : 滑り土塊の重量
- R : 滑り面上に働く反力
- θ : 壁体の傾斜角
- δ : 壁体と裏込め盛土間の摩擦角
- H : 壁体の高さ
- β : 裏込め盛土の傾斜角
- α : 滑り角
- ω : 水平面と壁体のなす角 ($=\pi/2+\theta$)
- ϕ : 内部摩擦角

一般的条件でのCoulomb主働土圧(龍岡(2010)を修正)

Coulomb主働土圧(一般的条件)(2)

● 滑り土塊に作用する力の釣り合い

水平方向の力の釣り合い:

$$Q_A^* \cos(\theta + \delta) - R \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 0 \quad (\text{右向きを正符号とした})$$

鉛直方向の力の釣り合い:

$$Q_A^* \sin(\theta + \delta) + R \sin\left(\phi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) - W = 0 \quad (\text{上向きを正符号とした})$$

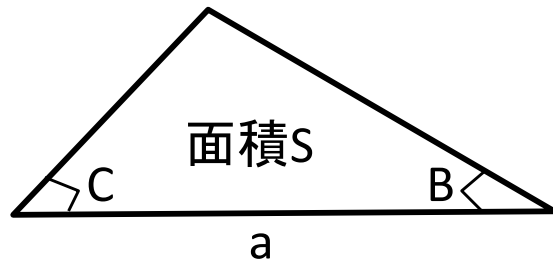
上の2式からRを消去し、 Q_A^* について解けば、次式を得る。

$$Q_A^* = \frac{\sin(\alpha - \theta)}{\cos(\alpha - \phi - \theta - \delta)} W \quad \rightarrow \quad \text{龍岡(2010)に一致}$$

Coulomb主働土圧(一般的条件)(3)

● 滑り土塊の重量Wの計算

1辺とその両端の2角が既知の三角形の面積



$$S = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin(B + C)}$$

上式を滑り土塊に適用すると、 $a = \frac{H}{\cos \theta}$, $C = \frac{\pi}{2} - \theta + \beta$, $B = \frac{\pi}{2} + \theta - \alpha$ として、

$$W = \gamma \cdot S = \gamma \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{H^2}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{\cos(\theta - \beta) \cos(\theta - \alpha)}{\sin(\alpha - \beta)}$$

$$\frac{\cos(\theta - \beta) \cos(\theta - \alpha)}{\sin(\alpha - \beta)} = \cos^2(\theta - \beta) \{ \tan(\theta - \beta) + \cot(\alpha - \beta) \}$$

$$W = \frac{1}{2} \gamma H^2 \frac{\cos^2(\theta - \beta) \{ \tan(\theta - \beta) + \cot(\alpha - \beta) \}}{\cos^2 \theta} \rightarrow \text{龍岡(2010)に一致}$$

Coulomb主働土圧(一般的条件)(4)

●Coulomb主働土圧

$$Q_A^* = \frac{1}{2} \gamma H^2 \cdot \frac{\cos^2(\theta - \beta)}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{\sin(\alpha - \phi) \{ \tan(\theta - \beta) + \cot(\alpha - \beta) \}}{\cos(\alpha - \phi - \theta - \delta)}$$

上式において滑り角 α が未定なので、 $\partial Q_A^* / \partial \alpha = 0$ の条件を満足する α ($\alpha = \cot \alpha$)を求め、その α を上式に代入することで、主働土圧 Q_A を算出する。

(土圧式の導入については、[右城の資料「クーロンの主働土圧公式の誘導」](#)が参考になる)

$$Q_A = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_A \quad : \text{主働土圧}$$

$$K_A = \frac{\cos^2(\phi - \theta)}{\cos^2 \theta \cos(\theta + \delta) \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\sin(\phi + \delta) \sin(\phi - \beta)}{\cos(\theta + \delta) \cos(\theta - \beta)}} \right\}^2} \quad : \text{主働土圧係数}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left\{ \frac{\cos(\phi + \delta + \theta - \beta)}{\sqrt{\frac{\cos(\theta + \delta) \sin(\phi + \delta)}{\cos(\theta - \beta) \sin(\phi - \beta)}} - \sin(\phi + \delta + \theta - \beta)} \right\} + \beta \quad : \text{主働時の滑り角}$$

Coulomb主働土圧(一般的条件)(5)

●Coulomb主働土圧式的设计への適用上の注意点(龍岡(2010)による)

(1)盛土は剛塑性体ではなく、ひずみ軟化特性を示し、実際の挙動は複雑である。しかし、実務ではCoulomb土圧が用いられることが多い。その理由として、水圧の影響や盛土からの排水の影響が大きいことがある。

(2)豪雨時の安全性確保のため、設計計算では以下が考慮される。①排水設備を整備した上で水圧をゼロと仮定する。②サクションによる見かけの粘着力はゼロとする。③飽和単位体積重量を用いる。④内部摩擦角として、ピークではなく残留時の値を用いる。

(3)設計計算における上記の考慮により、通常の状態では測定された土圧は、設計主働土圧よりもはるかに小さい。

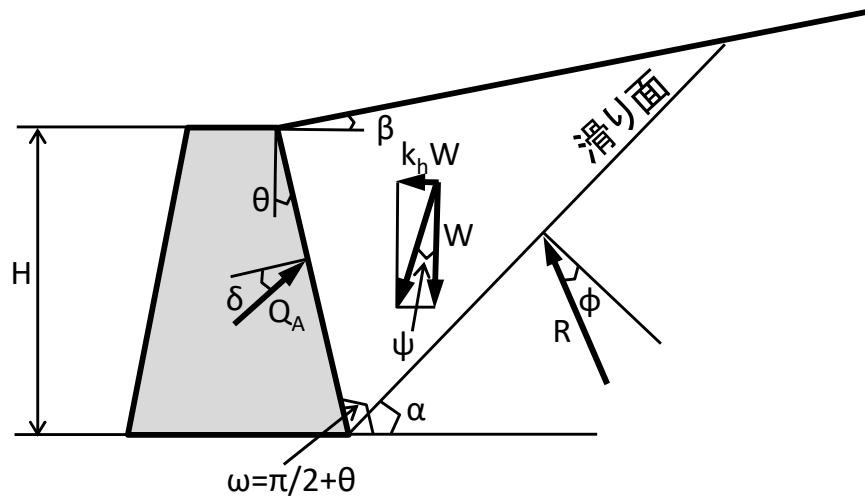
(4)矢板や地下連続壁を支持工を用い水平変位を生じないようにして掘削する場合には、主働土圧よりも大きくなり、また土圧分布形状も異なってくる。(土圧は擁壁の水平変位の関数)

地震時土圧(物部・岡部式)(1)

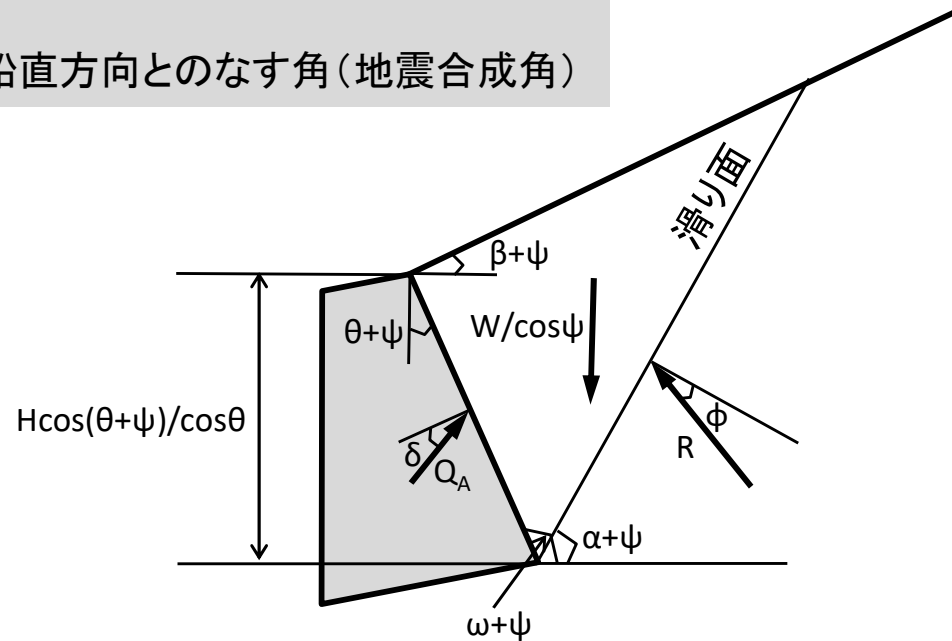
●物部・岡部式の考え方

- ・地震合成角 $\psi (= \tan^{-1}(k_h))$ だけ回転させたモデルにCoulomb土圧式を適用する。
- ・パラメータの置換: $\gamma \rightarrow \gamma/\cos\psi$, $\beta \rightarrow \beta+\psi$, $\theta \rightarrow \theta+\psi$, $\omega \rightarrow \omega+\psi$, $H \rightarrow H\cos(\theta+\psi)/\cos\theta$

k_h : 水平震度
 $k_h W$: 地震時慣性力
 ψ : 重量と慣性力の合力の方向と鉛直方向とのなす角(地震合成角)



地震時慣性力が作用した状態



地震合成角 ψ だけ回転させた状態

地震時土圧(物部・岡部式)(2)

●物部・岡部式

Coulombの主働土圧式(再掲)

$$Q_A = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_A \quad K_A = \frac{\cos^2(\phi - \theta)}{\cos^2 \theta \cos(\theta + \delta) \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\sin(\phi + \delta) \sin(\phi - \beta)}{\cos(\theta + \delta) \cos(\theta - \beta)}} \right\}^2}$$

$\gamma \rightarrow \gamma / \cos \psi$, $H \rightarrow H \cos(\theta + \psi) / \cos \theta$ より

$$\frac{1}{2} \gamma H^2 \rightarrow \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\cos \psi} \frac{H^2 \cos^2(\theta + \psi)}{\cos^2 \theta}$$

$\beta \rightarrow \beta + \psi$, $\theta \rightarrow \theta + \psi$ より

$$K_A \rightarrow \frac{\cos^2(\phi - \theta - \psi)}{\cos^2(\theta + \psi) \cos(\theta + \delta + \psi) \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\sin(\phi + \delta) \sin(\phi - \beta - \psi)}{\cos(\theta + \delta + \psi) \cos(\theta - \beta)}} \right\}^2}$$

地震時土圧(物部・岡部式)(3)

●物部・岡部式

上記のパラメータ置換により、物部・岡部式が以下のように得られる。

$$Q_{AE} = \frac{1}{2} \gamma H^2 K_{AE} : \text{地震時主働土圧}$$

$$K_{AE} = \frac{\cos^2(\phi - \theta - \psi)}{\cos \psi \cos^2 \theta \cos(\theta + \delta + \psi) \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\sin(\phi + \delta) \sin(\phi - \beta - \psi)}{\cos(\theta + \delta + \psi) \cos(\theta - \beta)}} \right\}^2} : \text{地震時主働土圧係数}$$

γ : 単位体積重量

H : 壁体の高さ

ψ : 地震合成角(自重と慣性力の合力の向きが鉛直方向となす角、水平震度を k_h として $\psi = \tan^{-1} k_h$)

ϕ : 内部摩擦角

θ : 壁体の傾斜角

δ : 壁体と盛土間の摩擦角

β : 盛土表面の傾斜角

参考文献

- 1) 龍岡文夫(2010):初級講座 この式どうやってできたの? どう使うの?
第4回Coulomb土圧、基礎工2010年1月
- 2) 龍岡文夫、古関潤一(2010):初級講座 この式どうやってできたの? どう使うの?
第5回地震時土圧(その1)、基礎工2010年2月
- 3) 右城猛(2003):クーロンの主働土圧公式の誘導、インターネットより、
<http://www.daiichi-c.co.jp/authors/ushiro/dobokukoza/coulomb2003.pdf>